Methodenbericht

Saisonbereinigung

Nürnberg, Februar 2014

Bundesagentur für Arbeit
Statistik

Impressum

Titel:	Saisonbereinigung
Herausgeber:	Bundesagentur für Arbeit Statistik
Erstellungsdatum:	Februar 2014

Autor(en):	Dr. Pierre-André Gericke Gerald Seidel

Weiterführende statistische Informationen:

Internet	http://statistik.arbeitsagentur.de
Hotline	0911 / 179 - 3632
Fax	0911 / 179 - 908053
E-Mail	statistik-datenzentrum@arbeitsagentur.de

.

Inhalt

Zusammenfassung

Arbeitsmarktzeitreihen werden von jährlich wiederkehrenden Saisoneffekten beeinflusst, die eine Beurteilung aktueller Entwicklungstendenzen am Arbeitsmarkt erschweren. Saisoneinflüsse können mittels statistischer Verfahren eliminiert werden, um eine bessere Einschätzung aktueller Entwicklungen zu ermöglichen. Das in der Statistik der Bundesagentur für Arbeit zur Saisonbereinigung eingesetzte Verfahren Census X-12 ARIMA enthält neben dem Saisonbereinigungskern ein Modul zur Vorbearbeitung der Zeitreihen sowie Kennzahlen, um die Ergebnisse der Saisonbereinigung zu beurteilen. Der Methodenbericht stellt dieses Saisonbereinigungsverfahren in seinen Grundzügen dar.

1. Einführung

Unter Saisonbereinigung versteht man das Entfernen saisonaler, d.h. unterjährig regelmäßig wiederkehrender Einflüsse aus einer Zeitreihe. Diese Einflüsse erschweren eine Einschätzung der Entwicklung wirtschaftsstatistischer Zeitreihen am aktuellen Rand. So möchte man beispielsweise einschätzen, ob ein beobachteter Anstieg der Arbeitslosigkeit im Berichtsmonat Januar als außergewöhnlich hoch anzusehen ist und damit als Anzeichen für eine Verschlechterung der Arbeitsmarktlage zu bewerten ist, oder ob dieser Anstieg der üblichen jahreszeitlichen Entwicklung entspricht. Bei einer solchen Fragestellung ist es sinnvoll, den typischen Anstieg der Arbeitslosigkeit im Januar aus der Zeitreihe heraus zurechnen und die um Saisoneinflüsse bereinigte Zeitreihe zu betrachten.

Es gibt zahlreiche Verfahren zur Eliminierung von Saisoneinflüssen. Eine verbreitete Methode ist der Vorjahresvergleich. Dieses Verfahren ist jedoch streng genommen keine Saisonbereinigung, weil durch einen Vorjahresgleich nicht die Veränderung im aktuellen Monat, sondern die Entwicklung über die zurückliegenden zwölf Monate betrachtet wird.[1] Die Verfahren zur Saisonbereinigung, die in statistischen Ämtern oder Wirtschaftsforschungsinstituten zum Einsatz kommen, können dagegen die von saisonalen Einflüssen bereinigte monatliche Entwicklung so abbilden, dass auch sich am aktuellen Rand abzeichnende grundlegende Änderungen frühzeitig erkannt werden können. Dies bietet eine wichtige Unterstützung für die politisch und operativ verantwortlichen Institutionen. In der Praxis am weitesten verbreitet ist das vom US Bureau of the Census entwickelte Verfahren X-12-ARIMA. Es wird in Deutschland u.a. von der Deutschen Bundesbank, dem Statistischen Bundesamt sowie von der Statistik der Bundesagentur für Arbeit verwendet. Im folgenden Bericht wird dieses Verfahren in seinen Grundzügen dargestellt. Zunächst wird das Zeitreihenmodell, das diesem Saisonbereinigungsverfahren zugrunde liegt, das sogenannte Komponentenmodell einer Zeitreihe, vorgestellt. Anschließend werden die einzelnen Schritte, die vor, während und im Anschluss an die Saisonbereinigung mit X-12 ARIMA durchgeführt werden, erläutert.

[1] Diese "mittlere" Veränderung zeigt Wechsel im Trend erst mit einer Verzögerung von ca. 1/2 Jahr an. Die alleinige Betrachtung solcher Werte birgt das Risiko zu später Erkenntnis und Reaktion.

2. Komponentenmodell einer Zeitreihe

Den Saisonbereinigungsverfahren liegt die Vorstellung zugrunde, dass sich Zeitreihen in einzelne nicht beobachtbare Komponenten zerlegen lassen. Jede dieser Komponenten spiegelt unterschiedliche Einflüsse auf den Verlauf einer Zeitreihe wider. Üblicherweise wird eine Zeitreihe als aus folgenden drei Komponenten zusammengesetzt angenommen (vgl. Kirchner 1999, Kap.1):

- Trend-Zyklus-Komponente (T)[2],
- Saisonkomponente (S) und
- Irregulärer Komponente (I).

Die Trend-Zyklus-Komponente spiegelt die mittel- bis langfristige Entwicklungstendenz der Zeitreihe wider. Die langfristigen Einflüsse auf die betrachtete Größe, die den Trendverlauf der Zeitreihe bestimmen, und die mittelfristigen, konjunkturellen Einflüsse, die die Ursache für ein zyklisches Verlaufsmuster der Zeitreihe darstellen, sind in der Trend-Zyklus-Komponente zusammengefasst. Die Saisonkomponente spiegelt regelmäßige, zur gleichen Jahreszeit in ähnlicher Intensität auftretende Einflüsse wider.[3] Die Irreguläre Komponente umfasst alle übrigen Einflüsse.

Es sind zwei Ansätze besonders gebräuchlich, nach denen die einzelnen Komponenten zusammengefasst werden: das additive und das multiplikative Modell. Beim additiven Ansatz oder additiven Modell ergibt sich die empirisch beobachtete Zeitreihe (Originalreihe) als Summe der einzelnen Komponenten:

$$Y(t) = T(t) + S(t) + I(t)$$

Die Komponenten $S(t)$ und $I(t)$ geben hier absolute (d.h. betragsmäßige) Abweichungen vom Niveau der Trend-Zyklus-Komponente an. Wird davon ausgegangen, dass die Arbeitslosigkeit in einem bestimmten Monat t aufgrund von saisonalen Einflüssen um 100.000 redu-

[2] Die Trend-Zyklus-Komponente (T) wird gelegentlich auch als glatte Komponente bezeichnet.

[3] Von der Kalender-Komponente, die den Einfluss der über die Jahre hinweg variierende Zahl an Arbeitstagen in einem bestimmten Kalendermonats zusammenfasst, wird hier abstrahiert. Bei den von der BA-Statistik aktuell saisonbereinigten Bestandszeitreihen des Arbeitsmarktes spielen Kalender-Effekte keine wesentliche Rolle.

ziert wird, so hat die Saisonkomponente S(t) im additiven Zeitreihen Modell den Wert -100.000.

Beim multiplikativen Modell wird die Originalreihe als Produkt der drei Komponenten dargestellt:[4]

$$Y(t) = T(t) \cdot S(t) \cdot I(t)$$

Die einzelnen Komponenten spiegeln hier die relativen Einflüsse wider. So gibt beispielsweise die Saisonkomponente den Faktor an, um den sich die Zeitreihe aufgrund des Saisoneinflusses ändert. Bei einem Saisonfaktor (oder einer Saisonkomponente) von 1,02 erhöht der Saisoneinfluss in einem bestimmten Kalendermonat das Zeitreihenniveau um zwei Prozent. Die betragsmäßige Erhöhung der Zeitreihe aufgrund des saisonalen Einflusses, d.h. der absolute Saisoneffekt, ist damit auch abhängig vom Niveau der Zeitreihe.

Jede Saisonbereinigung erfordert eine Schätzung der Zeitreihenkomponenten und setzt ein Modell voraus, in dem die einzelnen Komponenten verknüpft werden. Die saisonbereinigten Werte ergeben sich beim additiven Modell als Summe aus Trendkomponente und Irregulärer Komponente und entsprechen der Differenz aus Originalreihe und Saisonkomponente:

$$T(t) + I(t) = Y(t) - S(t)\,.$$

Beim multiplikativen Ansatz ist die saisonbereinigte Reihe das Produkt aus Trend- und Irregulärer Komponente und entspricht dem Quotienten aus Originalreihe und Saisonkomponente:

$$T(t) \cdot I(t) = Y(t) \,/\, S(t).$$

Für welches Modell man sich im Zuge der Saisonbereinigung entscheidet, additives oder multiplikatives Modell, hängt davon ab, ob man davon ausgeht, dass die saisonalen Ausschläge vom Niveau der Zeitreihe abhängen oder nicht. Beim multiplikativen Modell wird unterstellt, dass sich die saisonalen Schwankungen einer Zeitreihe proportional zum Reihenniveau verändern, also zum Beispiel mit einer höheren Arbeitslosigkeit zunehmen. Beim additiven Modell wird dagegen davon ausgegangen, dass die Stärke der Schwankungen

[4] Ein multiplikatives Modell kann durch Logarithmierung in ein additives Modell überführt werden.

einer Zeitreihe unabhängig vom Reihenniveau ist, also auch bei höherer Arbeitslosigkeit die saisonalen Schwankungen unverändert bleiben.

Folgt der Arbeitslosenbestand einem additiven oder einem multiplikativen Saisonmuster?

Betrachten wir nun als konkretes Beispiel die Zeitreihe des Arbeitslosenbestandes für Deutschland unter der Fragestellung, ob bei einer Saisonbereinigung dieser Zeitreihe eher von einem multiplikativen oder von einem additiven Komponentenmodell ausgegangen werden sollte.

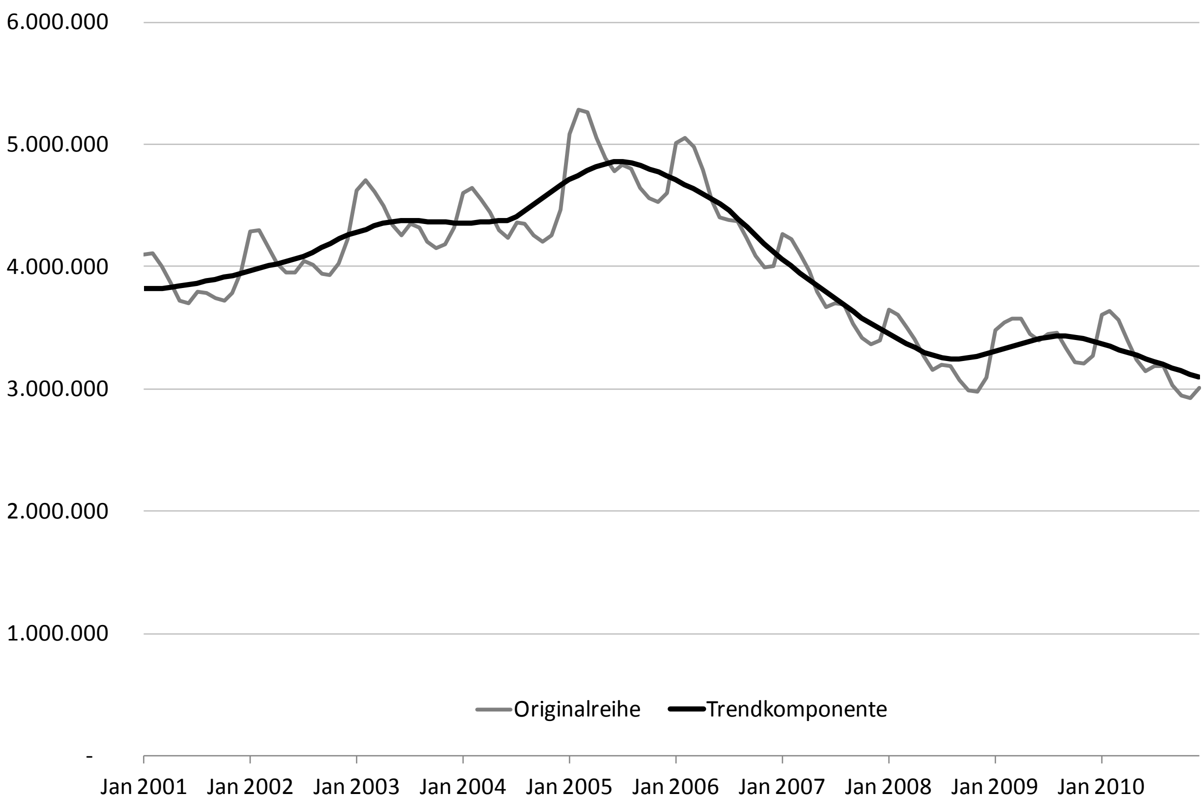

Abbildung 1: Entwicklung der Arbeitslosigkeit – Originalreihe und Trend

Abbildung 1 stellt den Verlauf der Originalreihe und der Trendkomponente des Arbeitslosenbestandes dar. Die Originalreihe wird durch die graue Linie und der Trend durch die schwarze Linie repräsentiert.[5] Trägt man nun die Differenz zwischen den Ursprungswerten und der Trendlinie in einem Diagramm ab, so erhält man die Abweichung der Arbeitslosigkeit vom Trend (vgl. Abb.2). Diese Kurve veranschaulicht im Wesentlichen die jahreszeitlich wieder-

[5] Das genaue Vorgehen bei der Bestimmung der Trendkomponente einer Zeitreihe ist Gegenstand des Abschnitts 3.

kehrenden Einflüsse auf die Zahl der gemeldeten Arbeitslosen (z.B. jahreszeitlich bedingte Witterungsverhältnisse und Ferienzeiten). Man erkennt zudem, dass das Niveau der absoluten Abweichungen im Zeitablauf schwankt. In den Jahren 2005 und 2006 mit vergleichsweise hohem Arbeitslosenbestand weicht die Arbeitslosigkeit stärker vom Trend ab als bei einem niedrigeren Arbeitslosenbestand wie in den Jahren 2008 bis 2009. Die Trendabweichung der Arbeitslosigkeit scheint vom Niveau der Arbeitslosigkeit abzuhängen. Dies spricht dafür, bei der Saisonbereinigung dieser Zeitreihe das multiplikative Modell zu verwenden.[6]

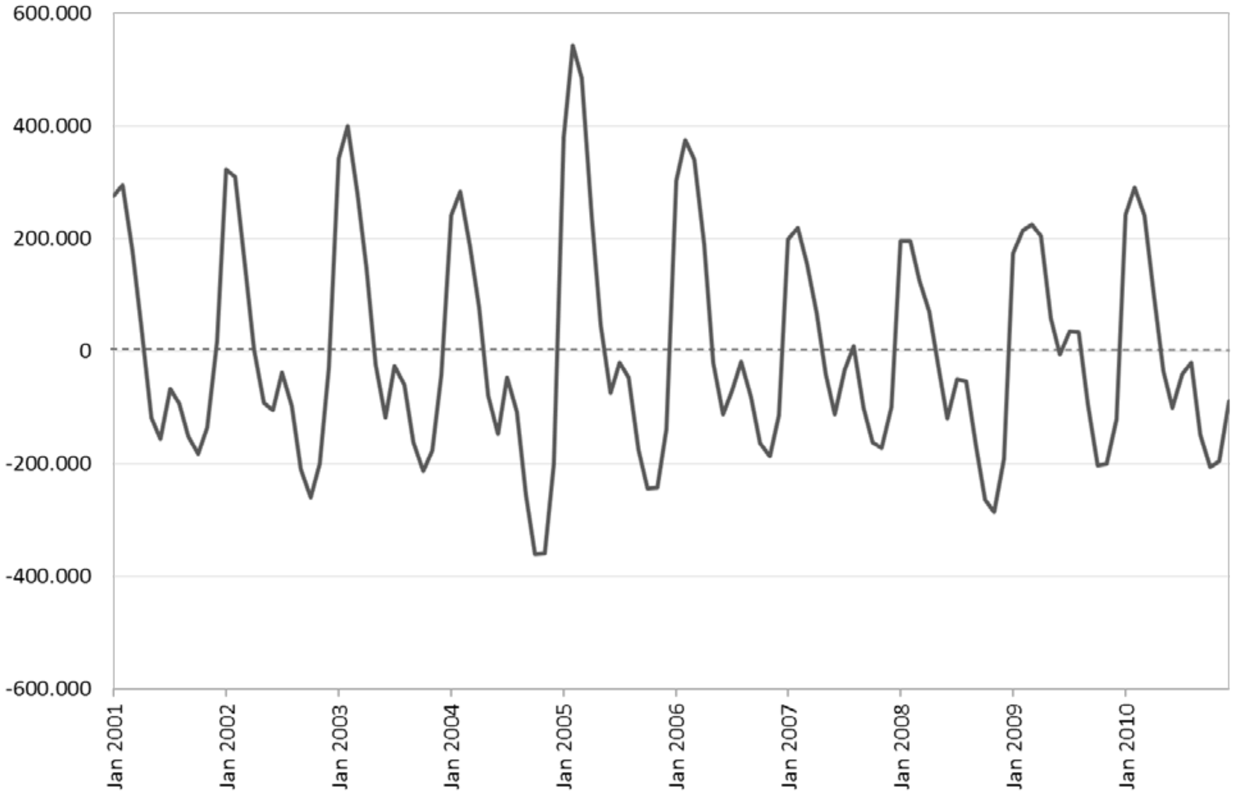

Abbildung 2: Abweichung der Arbeitslosigkeit vom Trend

---

[6] Beim multiplikativen Modell hängt die Abweichung einer Zeitreihe vom Trend vom Niveau der Zeitreihe ab. Das erkennt man, wenn man das multiplikative Modell $Y(t) = T(t) \cdot S(t) \cdot I(t)$ umformt:

$$Y(t) - T(t) = Y(t) - \frac{Y(t)}{S(t) \cdot I(t)} = Y(t) \cdot \left(1 - \frac{1}{S(t) \cdot I(t)}\right)$$

Ändert sich das Niveau der Zeitreihe $Y(t)$, so ändert sich die Trendabweichung $Y(t) - T(t)$ proportional. Beim additiven Modell $Y(t) = T(t) + S(t) + I(t)$ ist die Abweichung der Zeitreihe vom Trend ein absoluter Betrag, der unabhängig vom Zeitreihenniveau $Y(t)$ ist: $Y(t) - T(t) = S(t) + I(t)$. Der beobachte Sachverhalt, dass die Trendabweichung mit dem Niveau der Zeitreihe schwankt, kann daher nur durch das multiplikative Modell abgebildet werden.

3. Das Saisonbereinigungsverfahren Census X-12-ARIMA

Das Saisonbereinigungsverfahren X-12 ARIMA ist ein Verfahren, das in drei Stufen abläuft (vgl. Abb. 3). In der ersten Phase, dem Programmteil (oder Modul) RegARIMA erfolgt zunächst eine Bearbeitung der Originalzeitreihen unter Verwendung zeitreihenökonometrischer Methoden. Die betrachteten Zeitreihen werden dabei durch Schätzwerte an den Rändern verlängert sowie ggf. um Kalendereffekte und Ausreißer bereinigt.[7] Diese Schätzungen erfolgen mittels einer bestimmten Klasse von ökonometrischen Modellen, die man als RegARIMA-Modelle bezeichnet.[8] In der zweiten Phase wird die Saisonbereinigung mit Saison- und Trendfiltern durchgeführt. In der dritten Phase werden die Ergebnisse der Saisonbereinigung anhand verschiedener Kennzahlen und Tools überprüft.

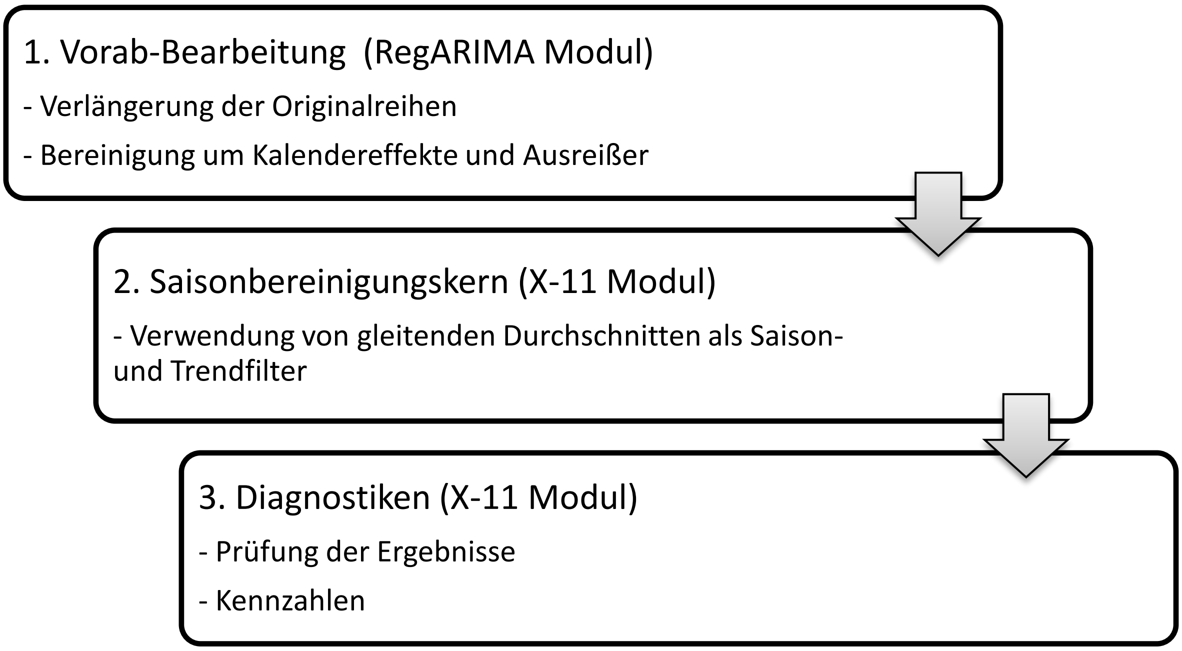

Abbildung 3: Ablauf der Saisonbereinigung mit X-12-ARIMA

Aus didaktischen Gründen wird zunächst in Kapitel 3.1 und 3.2 die Saisonbereinigung mit Saison- und Trendfiltern erklärt und dann im Anschluss im Kapitel 3.3 die Vorbearbeitung der Zeitreihen erläutert.

[7] Bei den Kalendereffekten und Ausreißern handelt es sich um modellexogene Einflüsse auf die Zeitreihenverläufe, die zu Verzerrungen der Bestimmung von Saisonfaktoren führen können.

[8] Für nähere Erläuterungen vgl. Abschnitt 3.3.

3.1. Saisonbereinigung mit Saison- und Trendfiltern

Die eigentliche Saisonbereinigung nach dem Census-Verfahren (Kernmodul X-11) erfolgt in vier Arbeitsschritten (vgl. Abb.4):

(1) Der erste Arbeitsschritt besteht in einer Schätzung der Trendkomponente durch Bildung eines geeigneten gleitenden Durchschnitts (Trendfilter) über die Originalzeitreihe.

(2) Im zweiten Arbeitsschritt wird von der Originalzeitreihe die im ersten Schritt ermittelte Trendkomponente heraus gerechnet,[9] so dass die Irreguläre Komponente und die Saisonkomponente als gemeinsamer Rest übrig bleiben. Man bezeichnet diesen Rest auch als rohe Saisonkomponente.

(3) Durch Bildung eines geeigneten gleitenden Durchschnitts (Saisonfilter) über die rohe Saisonkomponente wird im dritten Arbeitsschritt dann die Irreguläre Komponente eliminiert und man erhält eine erste Schätzung der (glatten) Saisonkomponente.

(4) Im vierten Schritt wird der Schätzwert der (glatten) Saisonkomponente aus der Originalreihe heraus gerechnet und man erhält (eine erste Version) der saisonbereinigten Zeitreihe.

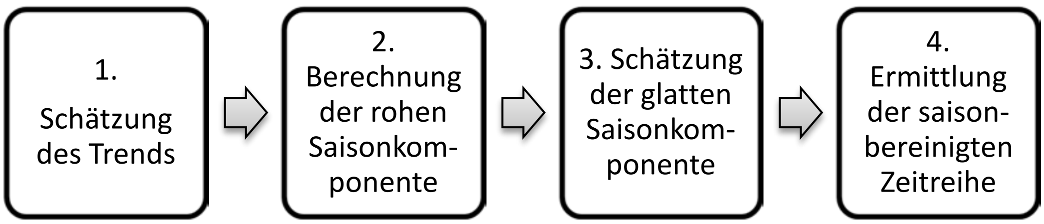

Abbildung 4: Arbeitsschritte der Saisonbereinigung im Modul X-11

Im Folgenden sollen diese vier Schritte der Saisonbereinigung anhand des multiplikativen Komponentenmodells (vgl. Abschnitt 2) näher erläutert werden. Dieses Modell wird für die meisten der von der Statistik der Bundesagentur für Arbeit zu bereinigenden Zeitreihen verwendet. Beim multiplikativen Modell entspricht die Originalreihe dem Produkt der Komponenten

$$Y(t) = T(t) \cdot S(t) \cdot I(t).$$

[9] Dabei wird die Trendkomponente von der Originalreihe subtrahiert (additives Komponentenmodell) oder die Originalreihe wird durch die Trendkomponente dividiert (multiplikatives Komponentenmodell).

Der erste Arbeitsschritt der Saisonbereinigung ist die Schätzung der Trendkomponente $T(t)$. Hierbei kommen unterschiedliche Filter zum Einsatz. Filter sind Techniken, mit denen einzelne Komponenten aus einer Zeitreihe eliminiert werden sollen. Ein Filter zur Trendschätzung (Trendfilter) soll die Saisonkomponente S(t) und die Irreguläre Komponente $I(t)$ aus der Originalzeitreihe $Y(t)$ eliminieren. Im Census-Verfahren werden als Filter gleitende Durchschnitte verwendet. Als gleitenden Durchschnitt einer Zeitreihe $Y(t)$ bezeichnet man die gewichtete Summe $M[Y(t)] = \sum_{k=-p}^{+f} \theta_{t+k} Y(t)$. Durch Wahl der Gewichte (θ_{t+k}) und des Stützbereichs (Zahl der in die Berechnung einfließenden Datenpunkte bzw. Summe $p + f + 1$) können die Filtereigenschaften eines gleitenden Durchschnitts beeinflusst werden. Die zur Bereinigung von Monatsdaten im Census-Verfahren standardmäßig verwendeten Trendfilter sind der 2x12-gleitende Durchschnitt und der 13-Term-Henderson Filter.[10] Diese gleitenden Durchschnitte sind als Trendfilter geeignet, da sie Schwingungen mit Perioden von unter einem Jahr weitgehend eliminieren.[11] Die Berechnung der Filter erfolgt entsprechend der Formel $M[Y(t)] = \sum_{k=-6}^{+6} \theta_{t+k} Y(t)$ mit den folgenden Gewichten:

Filter	$\boldsymbol{\theta_{t-6}}$	$\boldsymbol{\theta_{t-5}}$	$\boldsymbol{\theta_{t-4}}$	$\boldsymbol{\theta_{t-3}}$	$\boldsymbol{\theta_{t-2}}$	$\boldsymbol{\theta_{t-1}}$	$\boldsymbol{\theta_{t}}$	$\boldsymbol{\theta_{t+1}}$	$\boldsymbol{\theta_{t+2}}$	$\boldsymbol{\theta_{t+3}}$	$\boldsymbol{\theta_{t+4}}$	$\boldsymbol{\theta_{t+5}}$	$\boldsymbol{\theta_{t+6}}$
2x12	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$
Henderson	-.02	-.03	0	.07	.15	.21	.24	.21	.15	.07	0	-.03	-.02

Tabelle 1: Gewichte der Filter zur Trendermittlung

Der Henderson-Filter lässt variablere Verlaufsmuster der Trendkomponente zu als der 2x12-gleitende Durchschnitt.[12] Abbildung 5 illustriert diesen Sachverhalt anhand der Zeitreihe des Arbeitslosenbestandes. Schwingungen mit Perioden von mehr als einem Jahr werden bei

[10] Die Bezeichnung 2x12-gleitender Durchschnitt beruht auf der Tatsache, dass man die Filtergewichte auch durch sequentielle Anwendung (Faltung) eines zwölfgliedrigen gleitenden Durchschnitts $M_{12}[Y(t)]$ und eines zweigliedrigen gleitenden Durchschnitts $M_2[Y(t)]$ erhält, d.h. $M_{2x12}[Y(t)] = M_2\left[M_{12}[Y(t)]\right]$. Eine explizite Erläuterung der Faltung am Beispiel des 2x12-gleitenden Durchschnitts findet sich in Anhang E.

[11] Das Konstruktionsprinzip des Henderson-Filters stellt zudem eine möglichst glatte Schätzung der Trendzykluskomponente sicher.

[12] Die Gewichtung des Wertes der Zeitreihe im Zeitpunkt t ist beim Henderson Filter höher als beim 2x12 gleitenden Durchschnitt. Weicht der Wert der Zeitreihe im Zeitpunkt t von den Werten anderer Zeitpunkte ab, so beeinflusst dies den Wert des Henderson gleitenden Durchschnitts für den Zeitpunkt t stärker als den Wert des 2x12 gleitenden Durchschnitts.

Anwendung des Henderson Filters weniger stark gedämpft als beim 2x12-gleitenden Durchschnitt. Der mit dem Henderson-Filter geschätzte Trend verläuft daher variabler. Das Verfahren der Schätzung der Zeitreihenkomponenten wird iterativ durchgeführt (s.u.). Der Henderson-Filter wird am Ende dieses iterativen Prozesses zur endgültigen Schätzung der Trendkomponente verwendet, nachdem Extremwerte aus der Zeitreihe eliminiert wurden. Auf den ersten Iterationsstufen wird die Trendkomponente mit dem 2x12 gleitenden Durchschnitt geschätzt, um Verzerrungen aufgrund von Extremwerten zu minimieren.

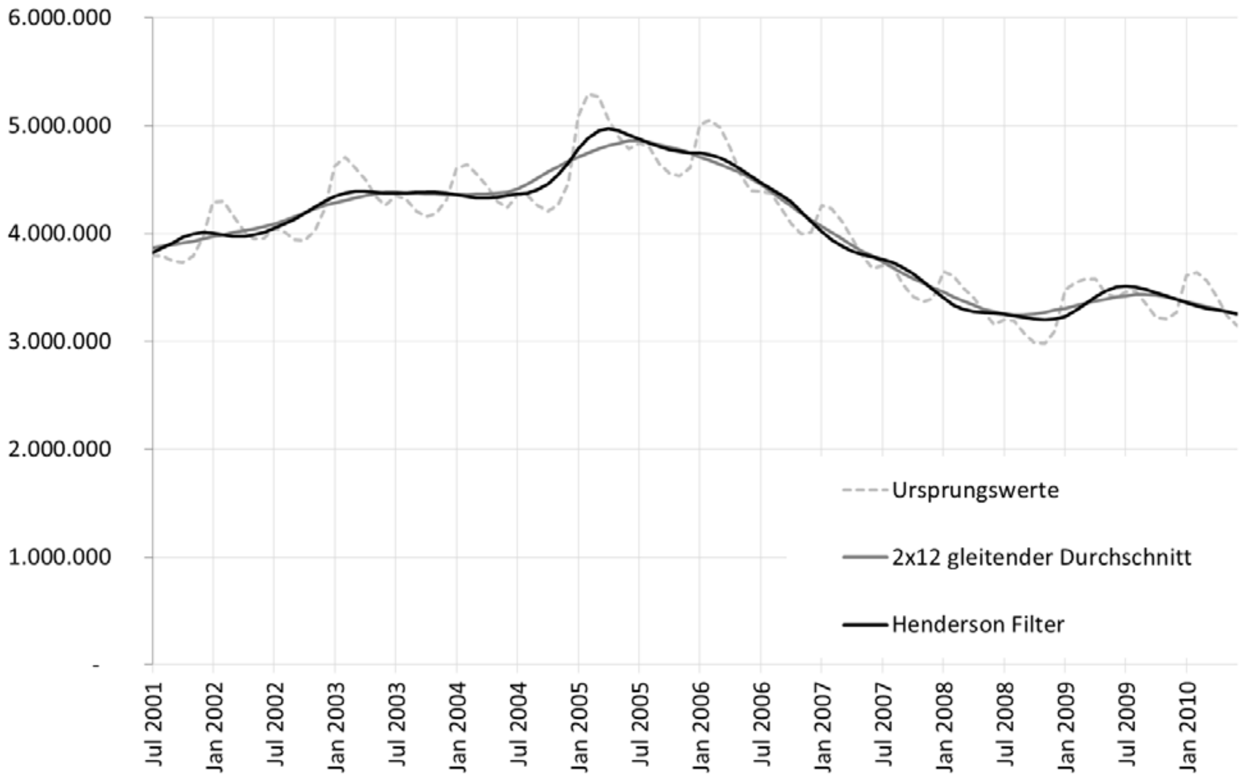

Abbildung 5: Verwendung unterschiedlicher Filter zur Schätzung der Trend-Zyklus-Komponente des Arbeitslosenbestandes

Durch die Anwendung des 2x12-gleitenden Durchschnitt oder des 13-Term-Henderson Filters soll die Trendkomponente $T(t)$ isoliert werden, so dass sich folgender Schätzwert für die Trendkomponente ergibt:

$$M[Y(t)] = T(t)'.$$

Im zweiten Schritt der Saisonbereinigung wird der im ersten Arbeitsschritt geschätzte Trend aus der Originalreihe heraus gerechnet. Man dividiert zu diesem Zweck die Originalreihe $Y(t)$ durch die geschätzte Trendkomponente $T(t)$‘ :

$$\frac{Y(t)}{T(t)'} = \frac{T(t) \cdot S(t) \cdot I(t)}{T(t)'} = [S(t) \cdot I(t)]'.$$

Das Ergebnis dieser Rechnung ist ein Schätzwert $[S(t) \cdot I(t)]'$ für das Produkt aus Saisonkomponente und Irregulärer Komponente, das man auch als rohe Saisonkomponente oder rohen Saisonfaktor bezeichnet. Der Schätzwert für die rohe Saisonkomponente bildet sowohl Saisoneinflüsse als auch Irreguläre Einflüsse auf die Zeitreihe ab.

Als dritter Schritt der Saisonbereinigung erfolgt die Eliminierung der Irregulären Komponente aus der rohen Saisonkomponente. Man erhält damit eine Schätzung des Saisoneinflusses, die sogenannte glatte Saisonkomponente. Dazu wird in diesem Arbeitsschritt ein gleitender Durchschnitt über die rohen Saisonfaktoren jedes einzelnen Kalendermonats gebildet. Auf diese Weise soll der monatsspezifische Saisonausschlag bestimmt werden. Abbildung 6 verdeutlicht das Vorgehen anhand des Arbeitslosenbestandes in Westdeutschland. Die für die einzelnen Kalendermonate im Zeitraum 1991 bis 2013 berechneten rohen Saisonfaktoren (SI Ratio) sind als Punkte dargestellt. Innerhalb der Spalte für den jeweiligen Kalendermonat sind die Saisonfaktoren von links nach rechts nach Kalenderjahr aufsteigend geordnet. Vereinzelt werden statt der Originalwerte Ersatzwerte (Replaced SI Ratio) dargestellt, die im Rahmen der Ausreißerbereinigung (s.u.) ermittelt wurden. Die durchgezogenen Linien repräsentieren den gleitenden Durchschnitt über die rohen Saisonfaktoren für den jeweiligen Kalendermonat. Die gleitenden Durchschnitte werden als Saisonfilter verwendet und sollen die Irreguläre Komponente aus der Zeitreihe der (monatsspezifischen) rohen Saisonfaktoren $[S(t) \cdot I(t)]'$ eliminieren. Sie stellen die Schätzungen der glatten Saisonfaktoren $S(t)$ dar (Seasonal Factors).

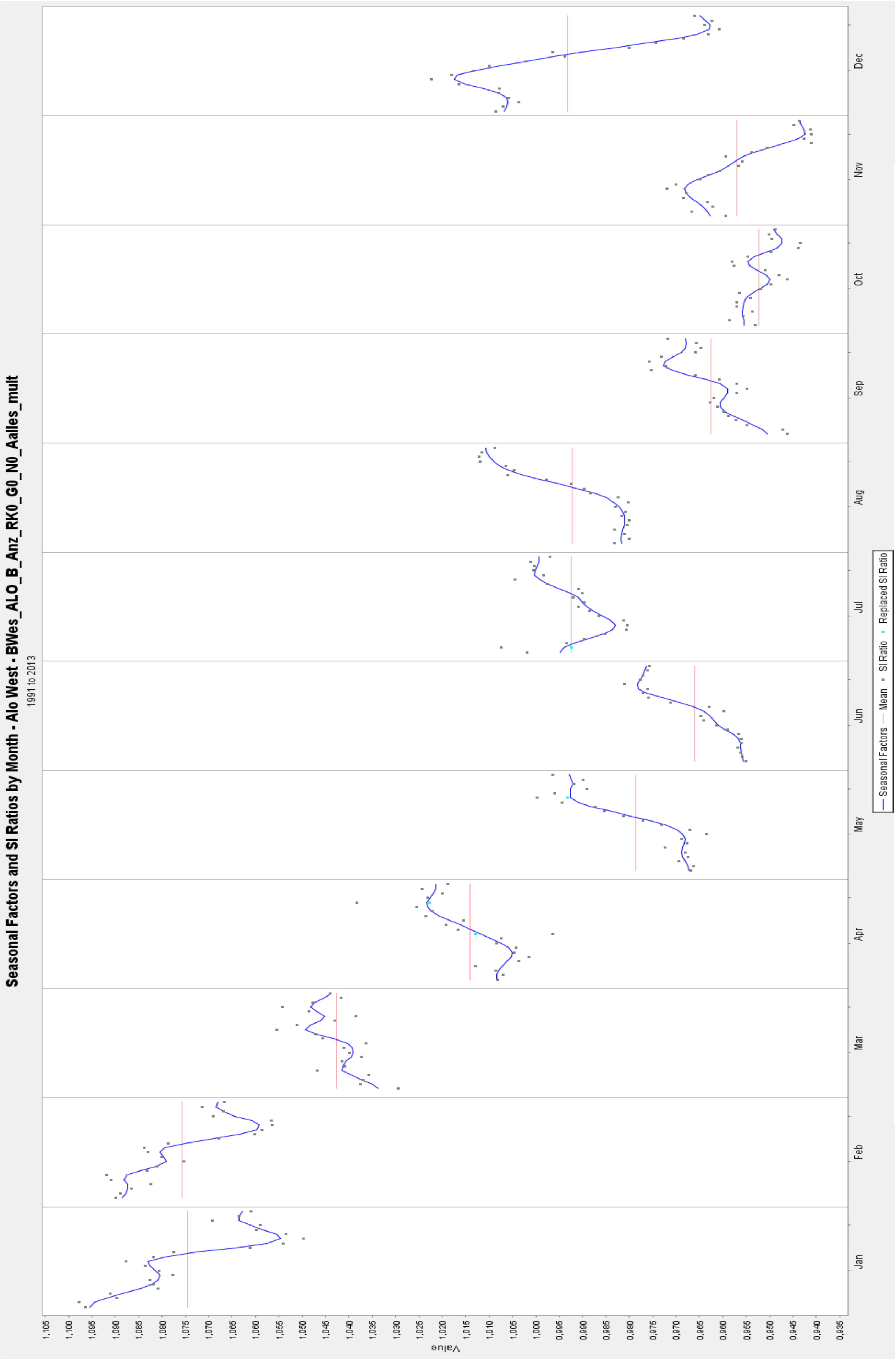

Abbildung 6: Rohe und glatte Saisonfaktoren für den Arbeitslosenbestand in Westdeutschland

Als Saisonfilter stehen insbesondere 3x3-,3x5-, 3x9-gleitende Durchschnitte zur Auswahl. Die Eignung dieser Filter als Saisonfilter beruht auf der Eigenschaft, Schwingungen mit kurzen Perioden aus einer Zeitreihe zu eliminieren. Die Filter werden entsprechend der Formel $M[Y(t)] = \sum_{k=-6}^{+6} \theta_{t+k} Y(t)$ mit den folgenden Gewichten berechnet:

Filter	θ_{t-5}	θ_{t-4}	θ_{t-3}	θ_{t-2}	θ_{t-1}	θ_t	θ_{t+1}	θ_{t+2}	θ_{t+3}	θ_{t+4}	θ_{t+5}
3x3				$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$			
3x5			$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$		
3x9	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{27}$

Tabelle 2: Gewichte der Filter zur Schätzung der glatten Saisonfaktoren

Tabelle 2 zeigt, dass den Saisonfiltern unterschiedliche Stützbereiche zugrunde liegen. Sie liegen zwischen 5 beim 3x3-Filter und 11 beim 3x9-Filter. Je länger der Stützbereich des verwendeten Filters ist, umso weniger reagiert die Schätzung der glatten Saisonkomponente eines Monats auf Schwankungen der entsprechenden monatsspezifischen rohen Saisonkomponente.

Dies wird anhand von Abbildung 6 deutlich: Auf die rohen Saisonfaktoren der Kalendermonate Januar, Februar, März und Dezember wurde ein 3x3-gleitender Durchschnitt, auf die übrigen Monate ein 3x5-gleitender Durchschnitt mit längerem Stützbereich als Saisonfilter angewandt. Man erkennt, dass die mit dem 3x3-Filter (kurzer Stützbereich) geschätzten glatten Saisonfaktoren im betrachteten Zeitraum stärker schwanken als die mit dem 3x5-Filter (langer Stützbereich) geschätzten. Die Filter mit längeren Stützbereichen dämpfen Schwankungen der rohen Saisonfaktoren stärker. Damit werden Schwankungen der rohen Saisonfaktoren bei Verwendung längerer Filter eher der Irregulären Komponente zugerechnet als der Saisonkomponente. Der Extremfall wäre ein arithmetisches Mittel über alle Saisonfaktoren eines bestimmten Kalendermonats (in der Grafik: Mean). Würde man diesen Wert als Saisonfilter verwenden, so würde man keine Variabilität der (glatten) Saisonfaktoren zulassen. Veränderungen der rohen Saisonfaktoren über die Zeit würden dann ausschließlich der Irregulären Komponente zugeschrieben. Veränderungen des monatsspezifischen Saisoneinflusses im Zeitablauf würden in diesem Falle nicht modelliert. Letztendlich ist die Einschätzung der Variabilität des Saisoneinflusses (oder die Kenntnis über Veränderungen saisonaler Einflüsse am aktuellen Rand) für die Wahl des Saisonfilters entscheidend. Sie hängt letztlich davon ab, als wie variabel das Saisonmuster einer Zeitreihe eingeschätzt wird.[13] Tabelle 3 stellt die Saisonfilter dar, die in der Statistik der Bundesagentut für Arbeit bei der Bereinigung einiger wichtiger Zeitreihen verwendet werden.

	Jan	Feb	Mrz	Apr	Mai	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dez
Alo	*3x3*	*3x3*	*3x3*	*3x5*	*3x5*	*3x5*	*3x5*	*3x5*	*3x5*	*3x5*	*3x5*	*3x3*
SvB	*3x5*	*3x5*	*3x5*	*3x5*	*3x5*	*3x5*	*3x5*	*3x5*	*3x5*	*3x5*	*3x5*	*3x5*
eLb	*3x3*	*3x3*	*3x3*	*3x5*	*3x5*	*3x5*	*3x5*	*3x5*	*3x5*	*3x5*	*3x5*	*3x3*

Tabelle 3: Saisonfilter wichtiger Zeitreihen für Westdeutschland (Bestandsgrößen)[14]

Die monatsspezifische Mittelung der rohen Saisonkomponente liefert Schätzwerte der glatten Saisonkomponente:

$$S(t)' = M\{ [S(t) \cdot I(t)]' \}$$

Der vierte Arbeitsschritt bei der Saisonbereinigung besteht darin, unter Verwendung der Schätzung der glatten Saisonkomponente *S(t)'* eine saisonbereinigte Zeitreihe zu berechnen. Im Falle eines multiplikativen Modells wird dazu die Originalreihe durch die geschätzte glatte Komponente dividiert:

$$\frac{Y(t)}{S(t)'} = \frac{T(t) \cdot S(t) \cdot I(t)}{S(t)'} = [T(t) \cdot I(t)]'.$$

Als Ergebnis erhält man die saisonbereinigte Zeitreihe $[T(t) \cdot I(t)]'$, die genau genommen die Schätzung einer um Saisoneinflüsse bereinigten Zeitreihe $T(t) \cdot I(t)$ darstellt. Die einzelnen Arbeitsschritte der Saisonbereinigung sind in folgender Tabelle zusammengefasst.

[13] Im Modul X-11 besteht die Möglichkeit, die Saisonfilter automatisch wählen zu lassen. Die gewählte Filterlänge hängt davon ab, ob die Bewegung der vorläufig geschätzten rohen Saisonkomponente $[S(t) \cdot I(t)]'$ durch die Saisonkomponente $S(t)$ oder die Irreguläre Komponente $I(t)$ dominiert wird. Um dies festzustellen, werden die durchschnittlichen jährlichen Veränderungsraten von $I(t)$ uns $S(t)$ ins Verhältnis gesetzt gesetzt. Je größer das sich so ergebende I/S-Verhältnis ist, umso mehr wird die Bewegung der rohen Saisonfaktoren durch die Irreguläre Komponente dominiert. Bei einem hohen (niedrigen) I/S-Verhältnis wählt X-11 daher einen Saisonfilter mit längerem (kürzerem) Stützbereich, der weniger (mehr) Variabilität der Saisonkomponente und mehr (weniger) Bewegung der Irregulären Komponente zulässt.

[14] Die Abkürzungen Alo, SvB und eLb bezeichnen den Bestand an Arbeitslosen, sozialversicherungspflichtig Beschäftigten und erwerbsfähigen Leistungsbeziehern. Die Schätzung der Komponenten dieser Zeitreihen erfolgt i.d.R. auf Grundlage des multiplikativen Komponentenmodells

	Arbeitsschritt	Vorgehen
1	Schätzung des Trends	$M[Y(t)] = T(t)'$
2	Berechnung der rohen Saisonkomponente	$Y(t)/T(t)' = [S(t) \cdot I(t)]'$
3	Schätzung der glatten Saisonkomponente	$S(t)' = M\{[S(t) \cdot I(t)]'\}$
4	Ermittlung der Saisonbereinigten Zeitreihe	$Y(t)/S(t)' = [T(t) \cdot I(t)]'$

Tabelle 4: Zusammenfassung der Saisonbereinigung im Modul X-11

Die Saisonbereinigung ist nach dem Durchlaufen dieser Arbeitsschritte nicht beendet. Stattdessen werden die dargestellten Schritte mehrmals wiederholt. Der Grund für dieses iterative Vorgehen ist, dass Extremwerte in den Ursprungsdaten die gleitenden Durchschnitte und damit die geschätzten Zeitreihenkomponenten beeinflussen und verzerren. Wenn man die oben dargestellten Schritte des Saisonbereinigungsverfahrens wiederholt durchführt, werden diese Extremwerteinflüsse schrittweise eliminiert und die Schätzungen der Zeitreihenkomponenten mit jeder Wiederholung verbessert in dem Sinne, dass Trend und Saison die systematischen Faktoren repräsentieren und die Extremwerte in der Restkomponente abgebildet werden.

Das Verfahren X-11 setzt sich insgesamt aus drei Iterationsstufen (B, C, D) zusammen, in denen der oben beschriebene Ablauf jeweils zweimal wiederholt wird. Dabei findet während der Iterationsstufen B und C eine Korrektur der Zeitreihen um Extremwerte statt. Im dritten Abschnitt D werden schließlich auf Basis der extremwertbereinigten Reihen die Zeitreihenkomponenten endgültig geschätzt und die endgültige Version der saisonbereinigten Zeitreihe ermittelt (Kirchner 1999, S. 28). Die nächsten Abschnitte dieses Kapitels stellen die Bereinigung der Zeitreihen um Extremwerte dar.

3.2. Ausschaltung von Extremwerten

Extremwerte sind Abweichungen einer Zeitreihe vom Trend, die nicht durch saisonale Einflüsse bedingt sind und über das übliche Maß hinausgehen. Ursachen können bspw. Gesetzesänderungen oder Veränderungen bei der Datenaufbereitung oder -erhebung sein, aber auch abrupte ökonomische Änderungen, die nicht als Teil von kurzen oder mittleren Zyklen interpretierbar sind. Solche Einflüsse können neben den Saisoneinflüssen eine wesentliche Ursache für Veränderungen von Zeitreihen darstellen. Die im Census-Verfahren verwendeten Trend- und Saisonfilter werden zudem stark von Extremwerten beeinflusst, die über die gleitenden Durchschnitte einen Einfluss auf die Schätzungen der Zeitreihenkomponenten haben. Aus diesem Grund werden während des Saisonbereinigungsverfahrens Extremwerte ermittelt und eliminiert. Man verwendet die Irreguläre Komponente (und nicht T oder S) um Extremwerte zu identifizieren. Der Grund ist, dass es sich bei Extremwerten um nicht saisonal beeinflusste Abweichungen vom Trend handelt. Zur Extremwertausschaltung wird eine Schätzung der Irregulären Komponente $I(t)$ benötigt. Um diese zu erhalten, müssen die in Abschnitt 3.1 beschriebenen vier Arbeitsschritte der Saisonbereinigung zunächst einmal durchlaufen werden. Das Ergebnis ist eine erste Schätzung der Saisonfaktoren $S(t)$. Sie wird verwendet, um eine Schätzung der Irregulären Komponente als Quotient der rohen und glatten Saisonfaktoren zu berechnen:

$$I(t)' = [S(t) \cdot I(t)]' \,/\, S(t)'$$

Das Verfahren zur Extremwertbereinigung im X-11-Modul geht von der Annahme aus, dass die durch die Irreguläre Komponente dargestellten Einflüsse im Durchschnitt keine Wirkung auf den Zeitreihenverlauf haben. Die Originalreihen weichen unter dieser Annahme nicht systematisch von dem durch Trend- und Saisonkomponente beschriebenen Verlaufsmuster ab. Im additiven Modell hat die Irreguläre Komponente unter dieser Annahme einen Erwartungswert von null, im multiplikativen Modell einen Erwartungswert von eins.

Um Extremwerte zu identifizieren, betrachtet man die Abweichung der Irregulären Komponente von ihrem Erwartungswert. Dabei werden diejenigen Beobachtungen als Extremwerte angesehen, die von ihrem Erwartungswert um mehr als einen vorher definierten Schwellenwert abweichen. Um den Schwellenwert zu ermitteln, ab dem eine Beobachtung als Extremwert gilt, wird die Standardabweichung der Irregulären Komponente über ein gleitendes Fünfjahresfenster berechnet (das laufende Jahr sowie die beiden Vorjahre und die beiden Folgejahre). Als Schwellenwert (für die Abweichung der Irregulären Komponente vom Erwartungswert) wird ein Vielfaches der Standardabweichung festgelegt, in der Standardeinstellung das 1,5-fache. Andere Schwellenwerte können durch den Benutzer festgelegt werden.

Extremwerte beeinflussen nicht nur die Irreguläre Komponente, sondern auch die Schätzungen der Trend- und Saisonkomponente. Der Grund ist, dass die als Trend- und Saisonfilter verwendeten gleitenden Durchschnitte stark von Extremwerten beeinflusst werden. Die

Schätzungen der Trend- und Saisonkomponente sind daher verzerrt, wenn Extremwerte auftreten. Es wäre daher nicht ausreichend, zur Extremwertausschaltung die Schätzung der rohen Saisonfaktoren $[S(t) \cdot I(t)]$‘ durch das Produkt aus geschätzter Saisonkomponente und korrigierter Irregulären Komponente zu ersetzten und damit die glatte Saisonkomponente (Schritt 3 in Tab.3) erneut zu schätzen. In die Berechnung einer so revidierten rohen Saisonkomponente würde die ursprüngliche Schätzung der Saisonkomponente S(t)‘ einfließen, die ohne Extremwertausschaltung berechnet wurde. Um den Einfluss von Extremwerten möglichst gering zu halten, wird in den betroffenen Monaten ein Ersatzwert für die rohe Saisonkomponente (und nicht für die Irreguläre Komponente) ermittelt. Als korrigierten Wert verwendet man einen gewichteten Durchschnitt der folgenden Werte (vgl. Ladiray und Quenneville, 2001, S. 61-68):

- den rohen Saisonfaktor für den Monat mit dem Extremwert (Gewicht zwischen null und eins),
- die beiden nächstgelegenen Werte der monatsspezifischen rohen Saisonkomponente vor und nach dem betrachteten Kalendermonat, in denen keine Extremwerte identifiziert wurden (Gewicht eins).

Ein Zahlenbeispiel: Der Wert der Irregulären Komponente einer Zeitreihe für den Monat Februar 2008 wurde als Ausreißer identifiziert, weil die Irreguläre Komponente in diesem Monat um zwei Standardabweichungen vom Erwartungswert abweicht. Als Gewichtungsfaktor wurde der Wert $w_t = 0{,}5$ ermittelt.[15] Für die rohen Saisonfaktoren seien die in der unten stehenden Tabelle angegebenen Werte errechnet worden, wobei der Ausreißer durch einen Stern gekennzeichnet wurde:

Feb 2006	Feb 2007	Feb 2008	Feb 2009	Feb 2010
114	110	106*	111	113

Tabelle 5: Rohe Saisonfaktoren (Beispiel)

Als Ersatzwert für den rohen Saisonfaktor im Beispiel erhält man:

[15] Die Bestimmung der Gewichte der rohen Saisonfaktoren bei der Berechnung von Ersatzwerten für die rohe Saisonkomponente wird in Anhang A erläutert.

$$SI_t^w = \frac{1}{4+0{,}5}\,(114 + 110 + 0{,}5 \cdot 106 + 111 + 113) = 111{,}33.$$

Dieser Wert würde der anschließenden Berechnung der glatten Saisonfaktoren zugrunde gelegt und stellt einen Ausgangspunkt für die weiteren Rechenschritte und Iterationen im Verlauf der Saisonbereinigung dar.

3.3. Vorbereitende Bearbeitung der Zeitreihen: Das RegARIMA-Modul

Das RegARIMA-Modul dient der Vorbearbeitung der Zeitreihen und ist der eigentlichen Saisonbereinigung, die im Modul X-11 erfolgt, vorgeschaltet. Die Zeitreihen der Ursprungswerte werden im RegARIMA-Modul an den Rändern durch Schätzwerte verlängert. Auf diese Weise werden Randwertprobleme verringert und damit die Qualität der Saisonbereinigung im anschließenden Modul X-11 verbessert. Randwertprobleme entstehen, weil man an den Rändern einer Zeitreihe nicht die üblichen symmetrischen Trend- und Saisonfilter zum Einsatz bringen kann. Dies führt am aktuellen Rand zu Verzerrungen der Schätzungen von Trend- und Saisonkomponente sowie zu einer geringeren Stabilität der Schätzergebnisse.[16]

Um diese Probleme zu vermeiden, ist es wünschenswert, die Saisonbereinigung vollständig auf Basis symmetrischer Filter durchzuführen. Man könnte daher erwägen, die Bereinigung auf den Teil der Zeitreihe zu beschränken, der den Einsatz symmetrischer Filter erlaubt. Dieses Vorgehen wäre nicht zielführend, da die Saisonbereinigung ja gerade dazu dienen soll, aktuelle Änderungen in der Entwicklungstendenz einer Zeitreihe möglichst früh zu erkennen. Ein anderer Weg besteht darin, die Zeitreihen mit Hilfe von Prognosen so weit in die Zukunft fortzuschreiben, dass auch am aktuellen Rand symmetrische Filter verwendet werden können.[17] Dieser Weg wird im Rahmen des RegARIMA-Moduls beschritten. Reg-ARIMA-Modelle bestehen aus einem sog. ARIMA-Teil (Autoregressive Integrated Moving Average), der Zeitreihen durch ihre früheren Werte (Autoregressiver Prozesss, AR) sowie durch aktuelle und verzögerte Zufallseinflüsse (Moving Average Prozess, MA) erklärt, und weiteren Re-

[16] Für eine genauere Erläuterung des Randwertproblems vgl. Anhang B.

[17] Es findet ebenso eine Rückwärtsverlängerung der Zeitreihe in die Vergangenheit statt (backcasting), um auch am anderen Ende der Zeitreihe symmetrische Filter einsetzen zu können.

gressoren, die u.a. zur Modellierung von Ausreißern dienen.[18] Der ARIMA-Teil dient zur Prognose, also zur „Verlängerung“ der Ursprungszeitreihe.[19]

Im Regressions-Teil besteht die Möglichkeit, eine Bereinigung der Zeitreihen um Ausreißer und andere externe Einflüsse wie Kalendereffekte vorzunehmen. Aufgrund externer Einflüsse kann es zu Brüchen im Verlaufsmuster einer Zeitreihe kommen. Werden solche Strukturbrüche ignoriert, kann dies zu fehlerhaften Schätzungen der Zeitreihenkomponenten und damit zu Fehlern bei der Saisonbereinigung führen. Insbesondere drei Ausreißertypen werden üblicherweise unterschieden: einmalige Ausreißer (*additive outlier*), transitorische Schocks (*temporary changes*) und Niveauverschiebungen (*level shifts*). Einmalige Ausreißer betreffen nur eine einzelne Beobachtung bzw. einen einzelnen Datenpunkt, dessen Wert durch den externen Einfluss verändert wird. Solche Einflüsse sind häufig das Ergebnis singulärer Ereignisse wie beispielsweise einer unüblichen Lage der Ferien oder außergewöhnlicher Witterungseinflüsse. Transitorische Schocks stellen vorübergehende Änderungen dar, die sich im Zeitablauf abschwächen, beispielsweise die Wirkung einer Fußball-Weltmeisterschaft, Olympischer Spiele oder anderer Großereignisse auf die Beschäftigung. Bei Niveauverschiebungen schließlich handelt es sich um dauerhafte Änderungen im Niveau der Zeitreihe, beispielsweise aufgrund von Änderungen in der Datenerhebung und -aufbereitung oder bei Gesetzesänderungen, wie zum Beispiel die Einführung der Grundsicherung für Arbeitsuchende, infolge der die Arbeitslosigkeit sprunghaft gestiegen ist (sog. statistischer Hartz IV-Effekt).[20]

Die verschiedenen Ausreißertypen werden durch entsprechende Regressoren (sog. Dummy-Variablen) in der Schätzgleichung modelliert. Soll ein einmaliger Ausreißer im Zeitpunkt t_0 modelliert werden, so nimmt der zugehörige Regressor in t_0 den Wert eins an und sonst den Wert null. Bei einer Niveauverschiebung erhält der Regressor ab dem Zeitpunkt t_0 dauerhaft den Wert eins, davor ist er null. Bei einem transitorischen Schock hat er vor dem Zeitpunkt t_0 den Wert null, in t_0 den Wert eins und nähert sich nach dem Zeitpunkt t_0 wieder dem Wert null an.

[18] Die Ausreißerbereinigung kann, wie oben dargestellt, auch im Kern-Modul X-11 erfolgen.

[19] Weitere Ausführungen zu ARIMA-Modellen finden sich im Anhang C.

[20] Da die verhaltensmäßigen Anpassungen im Zusammenhang mit der Einführung der Grundsicherung für Arbeitsuchende nicht ausschließlich zum Januar 2005, sondern auch noch in den Folgemonaten stattfanden, setzt sich der ‚statistische Hartz IV-Effekt‘ strenggenommen aus einer Folge von Niveauverschiebungen (level shifts) zusammen.

4. Prüfung der Ergebnisse der Saisonbereinigung

Die Ergebnisse der Saisonbereinigung sind abhängig vom zugrunde liegenden Komponenten-Modell und den damit verbundenen Annahmen. Zum Abschluss einer Saisonbereinigung ist es sinnvoll, die Ergebnisse zu prüfen, um mögliche Schwächen bei den getroffenen Annahmen und bei der Modellierung aufzudecken. Wichtige Kriterien bei der Prüfung sind dabei die folgenden:

1. Wurden Saisoneinflüsse korrekt identifiziert und vollständig eliminiert, oder gibt es noch saisonale Muster in der Zeitreihe?
2. Sind die identifizierten Saisonfaktoren stabil oder volatil?
3. Weist die Irreguläre Komponente wünschenswerte statistische Eigenschaften auf (z.B. keine Autokorrelation, kein saisonales Muster, keine Ausreißer)?
4. Können Wendepunkte im Zeitreihenverlauf ausreichend gut identifiziert werden?

Die Glattheit der saisonbereinigten Zeitreihe ist dagegen kein Kriterium für die Güte der Saisonbereinigung, da die Irreguläre Komponente in der saisonbereinigten Reihe enthalten ist und zu kleineren Schwankungen in der Zeitreihe führen kann.

In diesem Kapitel werden einige standardmäßig im X-11-Modul implementierte Verfahren vorgestellt, mit denen die Güte einer Saisonbereinigung anhand der o.g. Kriterien geprüft werden kann. Im ersten Abschnitt wird das erste Kriterium geprüft, also das Vorhandensein eines Saisonmusters. Dabei wird die Logik eines entsprechenden statistischen Tests (F-Test) erläutert. Anschließend werden mehrere statistische Diagnose-Kennzahlen präsentiert, mit denen jedes der genannten Kriterien geprüft werden kann. Abschließend wird mit der Spektralanalyse ein Diagnoseverfahren vorgestellt, mit dem sich das Vorhandensein bzw. die Elimination von Saison- und Kalendereffekten in den Originalreihen, der Irregulären und den RegARIMA-Residuen prüfen lässt.

4.1. Statistischer Test des Saisonmusters

Die Durchführung einer Saisonbereinigung ist nur bei Zeitreihen sinnvoll, die ein stabiles Saisonmuster aufweisen. Um dies zu überprüfen, bedient man sich eines sogenannten F-Tests, bei dem der Erklärungsbeitrag einer Gruppe von unabhängigen Variablen auf eine abhängige Variable geprüft wird. Im konkreten Fall wird geprüft, ob einzelne Kalendermonate (als Gruppe unabhängiger Variablen) in ihrer Gesamtheit einen signifikanten Einfluss auf das

Niveau der Ursprungszeitreihe haben (*stable seasonality test).* Dies sollte der Fall sein, wenn saisonale Effekte vorhanden sind, wenn also beispielsweise die Arbeitslosigkeit im Januar regelmäßig höher und im Oktober regelmäßig niedriger ist als im Jahresdurchschnitt. Entscheidend für die statistische Signifikanz eines Saisoneinflusses ist, ob die durch die Kalendermonate erklärte Varianz gemessen an der Gesamtvarianz der Zeitreihe hoch ist. Ist dies der Fall, so hat die F-Statistik einen hohen Wert.[21] Je höher der Wert der F- Statistik, umso höher ist die Sicherheit (oder Konfidenz), mit dem die (Null-) Hypothese abgelehnt werden kann, dass die einzelnen Kalendermonate keinen Einfluss auf die Zeitreihe haben.

Standardmäßig wird in X-12-ARIMA der F-Test auf Saisonalität auf die Ursprungszeitreihe angewandt sowie auf die durch das Kernmodul X-11 ermittelten Saisonfaktoren. Ergänzt wird der (parametrische) F-Test auf die Saisonfaktoren durch den verwandten (parameterfreien) Kruskal-Wallis-Test, da die statistischen Voraussetzungen für einen F-Test nicht immer gegeben sind. Der F-Test reagiert sensitiver auf systematische Effekte. Die Nullhypothese, dass kein klares Saisonmuster vorliegt, wird beim F-Test daher häufiger abgelehnt als beim Kruskal-Wallis-Test.

Eine weitere Ergänzung ist der F-Test zur Prüfung der Stabilität des Saisonmusters im Zeitablauf *(moving seasonality test)*. Dieser bezieht sich auf das zweite der oben genannten Gütekriterien für die Saisonbereinigung, die Stabilität des Saisonmusters. Hierbei wird geprüft, ob der Einfluss eines einzelnen Kalendermonats auf das Zeitreihenniveau über den betrachteten Zeitraum hinweg gleich bleibt.

4.2. Diagnostische Kennzahlen

In der Einleitung dieses Kapitels wurden als Kriterien für die Güte einer Saisonbereinigung genannt das Vorhandensein bzw. die Elimination des Saisoneinflusses, Stabilität der Saisonfaktoren, Eigenschaften der Irregulären Komponente und Identifizierbarkeit von Wendepunkten. Um zu prüfen, ob diese Gütekriterien erfüllt sind, werden im X-11-Modul eine Reihe von diagnostischen Kennzahlen berechnet, die so genannten M- und Q-Statistiken. Die M-Statistiken prüfen jeweils ein einzelnes Kriterium, die Q-Statistiken sind gewichtete Durchschnitte der M-Statistiken und prüfen damit alle Kriterien simultan[22]. Es gibt 11 M-Statistiken

[21] Die F-Statistik ist die Kennzahl (Teststatistik), nach welcher der F-Test benannt ist.

[22] Die Q-Statistiken in X-12-ARIMA dürfen daher nicht mit der gleichnamigen Test-Statistik des Ljung-Box-Tests auf Autokorrelation (Box/Pierce 1970, Ljung/Box 1978) verwechselt werden.

(M1 bis M11) und zwei Q-Statistiken (Q und Q2). Alle diese Kennzahlen können Werte zwischen null und drei annehmen. Werte größer als eins gelten dabei als kritisch. Die wichtigste M-Statistik ist die Kennzahl M7. Sie prüft das erste Kriterium, ob überhaupt ein stabiles Saisonmuster vorliegt und eine Saisonbereinigung der betrachteten Zeitreihe durchgeführt werden sollte. Die übrigen M-Statistiken lassen sich ebenfalls grob den einzelnen Kriterien zuordnen:

- Stabilität der Saisonfaktoren: M8, M9, M10, M11
- Wünschenswerte Eigenschaften der Irregulären Komponente: M1, M2, M4, M6
- Identifizierbarkeit von Wendepunkten: M3, M5

Eine genauere Erläuterung der Kennzahlen M1-M11 findet sich in der Übersicht im Anhang D. Dort sind auch Maßnahmen genannt, die ergriffen werden können, wenn eine der Kennzahlen einen auffällig hohen Wert besitzt. Zudem ist dort auch das Gewicht angegeben, mit dem die Kennzahl in die Berechnung der Q-Statistik eingeht. Die Q2-Statistik, die der Q-Statistik ohne Berücksichtigung von M2 entspricht, wird im Folgenden nicht weiter behandelt.

4.3. Spektralanalyse

Die Spektralanalyse ist ein Verfahren der Zeitreihenanalyse, mit dem sich Zyklen in Zeitreihen identifizieren lassen. Es nutzt den Umstand, dass jede Zeitreihe als Summe von ‚harmonischen Schwingungen‘[23] unterschiedlicher Frequenz und Stärke dargestellt werden kann. Im Rahmen der Spektralanalyse wird untersucht, mit welchem Anteil Schwingungen einer bestimmten Frequenz zur beobachteten Gesamtvarianz einer Zeitreihe beitragen. Das Verfahren kann zur Qualitätssicherung der Saison- und Kalenderbereinigung genutzt werden. Hintergrund ist, dass sich Saison- und Kalendereffekte als Schwingungen bestimmter Frequenzen interpretieren lassen. Wird im Rahmen einer Spektralanalyse festgestellt, dass eine Zeitreihe in hohem Maße Frequenzen enthält, die Saison- und Kalendereffekten zugerechnet werden, so sind saisonale und kalendarische Einflüsse vorhanden bzw. wurden bei einer bereits erfolgten Bereinigung der Zeitreihe nicht vollständig eliminiert.

Saisoneffekte wiederholen sich in annähernd gleichen zeitlichen Abständen. Die Häufigkeit oder Frequenz, mit der diese Einflüsse üblicherweise pro Zeitintervall auftreten (z.B. einmal pro Jahr, pro Halbjahr oder pro Quartal), ist bekannt. Tritt ein Effekt alle zwölf Monate, also

[23] Harmonische Schwingungen sind solche, die durch eine Sinus-Funktion beschrieben werden.

jährlich auf, so ist seine Frequenz 1/12 [24], tritt der Effekt alle 3 Monate, also vierteljährlich auf, beträgt die Frequenz 4/12 bzw. 1/3. Bei der Analyse von Monatszeitreihen werden die Frequenzen 1/12, 1/6, 1/4, 1/3, 5/12 und 1/2 als saisonale Einflüsse interpretiert.[25]

Etwas komplizierter wäre der Sachverhalt bei Kalendereffekten, die bei Arbeitsmarktzeitreihen grundsätzlich ebenfalls denkbar sind. Hier sind sehr viele relevante Frequenzbereiche vorstellbar.[26] Cleveland und Devlin (1980, 1982) zeigen, dass insbesondere zwei Frequenzen für mögliche Kalendereffekte bedeutsam sind: 0,348 (für wöchentliche Effekte) [27] sowie 0,432 [28].

Wie viel die Schwingungen einer bestimmten Frequenz zur Gesamtvarianz einer Zeitreihe beitragen, kann grafisch in einem sog. Spektrogramm dargestellt werden. Dies ist ein Diagramm, bei dem die verschiedenen Frequenzen auf der Abszisse und deren Anteil an der Gesamtvarianz auf der Ordinate abgetragen wird. In X-12-ARIMA werden Spektrogramme standardmäßig ausgegeben.[29] Die einzelnen Frequenzen werden durch blaue Säulen dargestellt, deren Höhe den jeweiligen Anteil an der Gesamtvarianz widerspiegelt.

Die für Saisoneinflüsse einschlägigen Frequenzen 1/12, 2/12, 3/12, 4/12, 5/12 und 6/12 werden in X-12-ARIMA durch schwarze senkrechte Linien hervorgehoben. Die roten senkrechten Linien hingegen markieren Frequenzen, die bei Vorhandensein von Kalendereffekten einen hohen Varianzanteil aufweisen würden. Übersteigen diejenigen blauen Säulen, die Saison- oder Kalendereffekte repräsentieren, ihre benachbarten Säulen deutlich[30], meldet

[24] Bei Quartalsdaten ergäbe sich für diesen jährlichen Effekt eine Frequenz von 1/4.

[25] Die Frequenz 0/12 entspricht dem Trend, da dieser keine periodisch wiederkehrenden Effekte enthält. Sie dominiert anteilsmäßig die Saison- und Kalender-Effekte und wird daher nicht ausgewiesen.

[26] Kalendereffekte können insbesondere deshalb auftreten, weil die einzelnen Wochentage und die Monate/Jahre im Kalender nicht synchron laufen. Einzelne Kalendereffekte kehren erst nach 28 Jahre bzw. 336 Monaten wieder (Kombination aus möglichen 7 Wochentagen und 4 Kalenderjahren, der Frequenz für Schaltjahre). Die Regel, dass Schaltjahre in allen Jahren, die durch 100 teilbar sind, ausfallen, ausgenommenen denen, die durch 400 teilbar sind (z.B. im Jahr 2000), wird hierbei vernachlässigt.

[27] Die einzelnen Wochentage treten durchschnittlich 4,348 Mal pro Monat auf. Der ganzzahlige Anteil dieser Frequenz ist im Spektrogramm nicht (gesondert) sichtbar, nur die "Restfrequenz" 0,348.

[28] 0,432 ist nach Cleveland/Devlin (1980, 1982) die zweitwichtigste "Restfrequenz" im o.g. 28-Jahre-Rhythmus.

[29] Die Darstellungsweise der Abbildungen 10 bis 13 ist dem Programm WinX12 entnommen, der Standard-Benutzeroberfläche von X12-ARIMA. Die Darstellung im Standard-Output von X12-ARIMA wird im einfachen Textformat ausgegeben und weicht davon geringfügig ab.

[30] Ein Unterschied gilt als deutlich, wenn der Anteil der entsprechenden Frequenz über dem Median liegt und die benachbarten Anteilswerte um mindestens 6/52 der Min-Max-Differenz aller Anteilswerte übersteigt.

das Programm X12-ARIMA, dass Hinweise auf Saison- oder Kalendereffekte „visually significant“ seien.[31, 32] In diesem Fall werden die entsprechenden Säulen durch ein „S“ (für ‚seasonal effect‘) oder durch ein „T“ (für ‚trading day effect‘) an ihrer Spitze markiert.

Die Spektralanalyse kann für die Ursprungszeitreihe, die saisonbereinigte Zeitreihe, die Zeitreihe der Irregulären Komponente sowie für die RegARIMA-Modellresiduen durchgeführt werden. Die Bedeutung der einzelnen Spektrogramme soll im Folgenden am Beispiel der Arbeitslosenzeitreihe für Westdeutschland erläutert werden. Die Säulen auf der linken Seite des Spektrogramms repräsentieren Wellen mit einer langen Periodendauer (kleine Frequenz), d.h. die eher selten wiederkehrenden Effekte. Die Säulen weiter rechts stehen für kurze Periodendauern (hohe Frequenzen), also für häufiger wiederkehrende Effekte. So spiegelt beispielsweise die Frequenz 0,5 (= 6/12) Effekte wider, die sechs Mal pro Jahr auftreten, also alle zwei Monate. Die Frequenz 0,167 (≈2/12) steht für Effekte, die zweimal pro Jahr und damit halbjährlich wiederkehren. Die Frequenz „null“ entspricht dem langfristigen, glatten Trend ohne wiederkehrende Effekte.

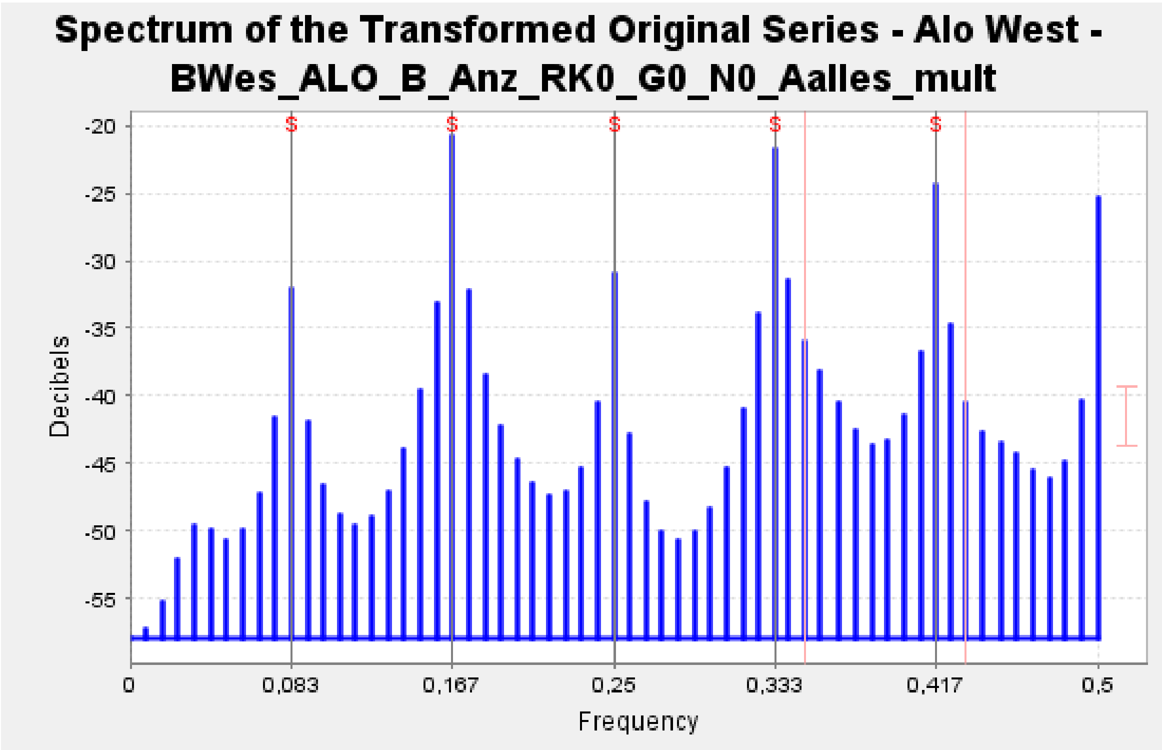

Abbildung 10: Spektrogramm der Ursprungszeitreihe der Arbeitslosen in Westdeutschland.

[31] Dieser Hinweis unterbleibt lediglich für die Frequenz ½ (2-monatliche Effekte), da diese häufig durch Rauschen überlagert wird (vgl. U.S. Census Bureau (2011): X-12-ARIMA Reference Manual, Version 0.3, Seite 50).

[32] Das Konzept der ‚visuellen Signifikanz‘ wird verwendet, da sich die Berechnung valider Konfidenzintervalle aufgrund von Autokorrelationen schwierig gestalten würde. Die Verlässlichkeit des Konzepts der ‚visuellen Signifikanz“ wurde von Soukup und Findley (1999) untersucht.

Das Spektrogramm der westdeutschen Arbeitslosenzeitreihe in Abbildung 10 zeigt deutliche „Ausschläge“ bei den für Saisoneffekte typischen Frequenzen; diese tragen also einen hohen Anteil zur Gesamtvarianz dieser Zeitreihe bei. Die westdeutsche Arbeitslosigkeit ist folglich sehr deutlich von saisonalen Effekten geprägt, die insbesondere 2-monatlich, viertel-, drittel- und halbjährlich auftreten. Das Saisonbereinigungsverfahren kann demnach methodisch sinnvoll auf diese Zeitreihe angewandt werden.

Dagegen fallen diejenigen Säulen, welche die für Kalendereffekte typischen Frequenzen 0,348 und 0,432 repräsentieren, deutlich gegenüber den „saisonalen“ Säulen ab und sind nur von durchschnittlicher Höhe. Das Spektrogramm der Ursprungszeitreihe deutet daraufhin, dass die westdeutsche Arbeitslosenzeitreihe kaum von Kalendereffekten beeinflusst wird.

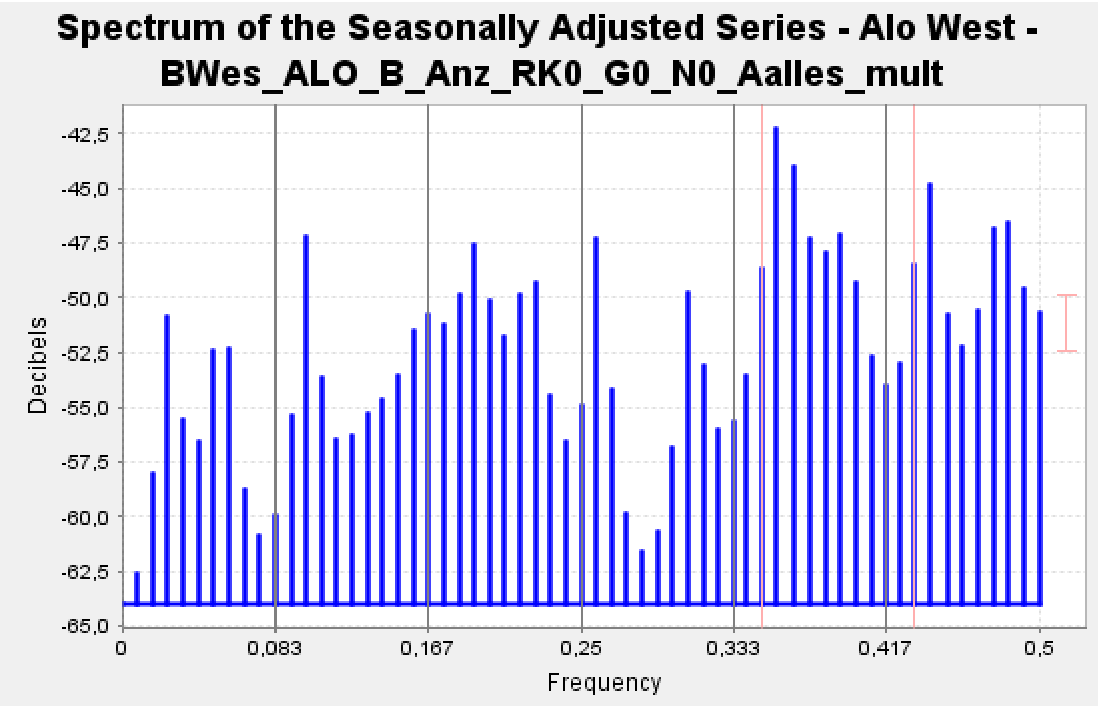

Abbildung 11: Spektrogramm der saisonbereinigten Arbeitslosen in Westdeutschland

Einen deutlichen Kontrast zum Spektrogramm der Ursprungszeitreihe bildet das Spektrogramm der saisonbereinigten Zeitreihe in Abbildung 11. Die Ausschläge bei den Frequenzen 1/12, 1/6, 1/4, 1/3, 5/12 und 1/2, die Saisoneinflüsse repräsentieren und bei der Ursprungszeitreihe deutlich erkennbar waren, sind nun nicht mehr vorhanden. Die Saisonbereinigung wurde offensichtlich erfolgreich durchgeführt. Wären im Spektrogramm der saisonbereinigten Zeitreihe noch Hinweise auf saisonale Effekte zu erkennen, so dürfte bei der Saisonbereinigung ein zu kurzer oder zu langer Filter gewählt worden sein oder ein Saisonmuster vorliegen, das innerhalb des betrachteten Zeitraums nicht stabil ist[33].

Nach einer Saisonbereinigung sollte nur die Saisonkomponente saisonale Einflüsse enthalten. Die saisonbereinigte Zeitreihe sowie die Komponenten, aus denen sie besteht, Trendkomponente und Irreguläre Komponente, sollten frei von Saisoneinflüssen sein. Als Ergänzung zum Spektrogramm der saisonbereinigten Zeitreihe kann zusätzlich das Spektrogramm der Irregulären Komponente in Abbildung 12 betrachtet werden. Daran kann untersucht werden, ob die Irreguläre Komponente saisonale Effekte enthält. Das Spektrogramm zeigt keinerlei (verbliebene) Saisoneffekte an. Dieses Ergebnis bestätigt das Ergebnis der Spektralanalyse der Zeitreihe der saisonbereinigten Arbeitslosigkeit in Westdeutschland.

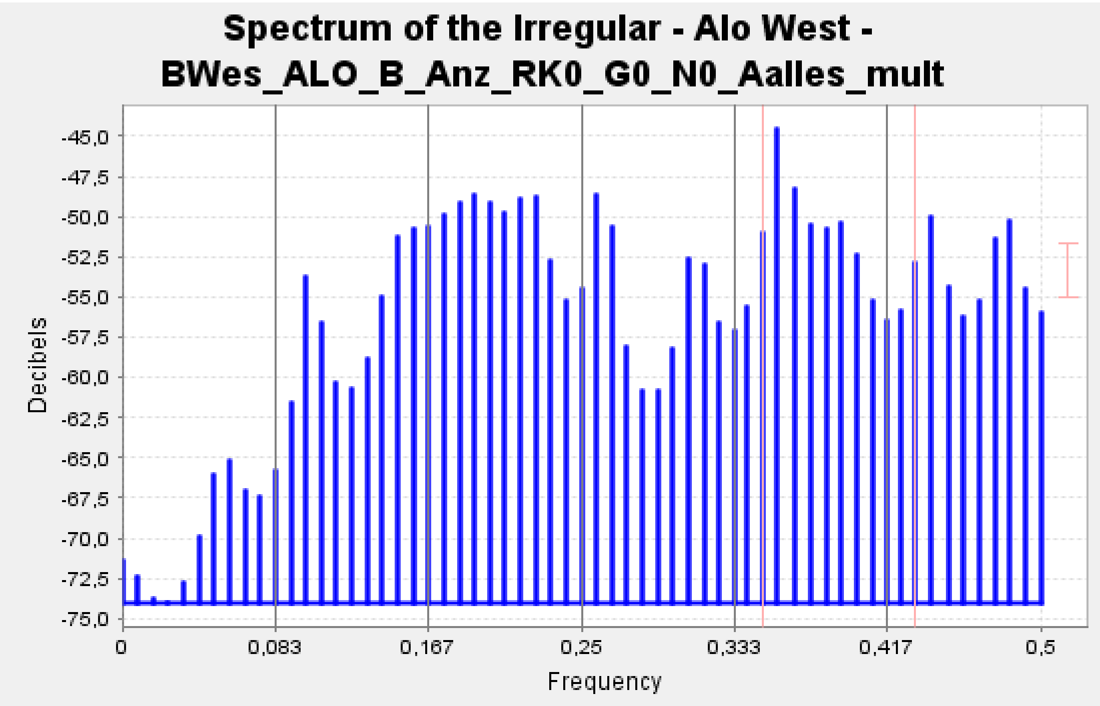

Abbildung 12: Spektrogramm der Irregulären Komponente der Saisonbereinigung der Arbeitslosen in Westdeutschland.

[33] Die Spektralanalyse wird standardmäßig auf die letzten 96 Datenpunkte angewandt, da 8 Jahre (bei Monatszeitreihen) hinreichend lang, aber noch nicht zu stark durch strukturelle Veränderungen im Zeitablauf gekennzeichnet sein dürften. Eine verlässliche Spektralschätzung mit entsprechenden verbalen Angaben (‚visually significant') erfolgt ab einer Zeitreihenlänge von 72 Datenpunkten.

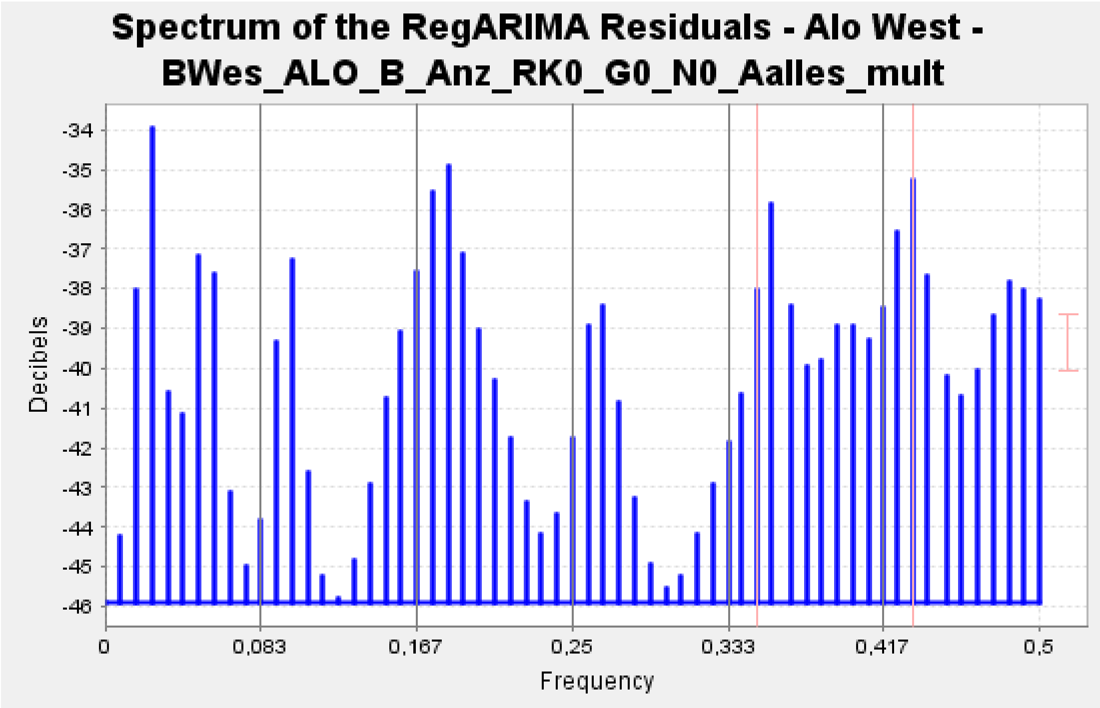

Abbildung 13: Spektrogramm der RegARIMA-Residuen der Arbeitslosen in Westdeutschland

Analog zur Vorgehensweise bei Irregulären Komponente können auch die Residuen der in Abschnitt 3.3 skizzierten RegARIMA-Schätzung einer Spektralanalyse unterzogen werden. Da das Spektrogramm dieser Residuen (Abbildung 13) keine ‚visuell signifikanten' Ausschläge für saisonal relevante Frequenzen zeigt, darf geschlossen werden, dass die verwendete ARIMA-Modellierung die in der Ursprungszeihe festgestellten saisonalen Effekte in angemessener und ausreichender Weise abbildet. Dies dient einer realistischen Verlängerung der Ursprungszeitreihe und somit einer stabilen, unverzerrten Saisonbereinigung am aktuellen Rand.

Literatur

Box, G.E.P. und Jenkins, G.M. (1970), Time Series Analysis - Forecasting and Control, San Francisco: Holden Day.

Bloem, A. M., R. J. Dippelsman und N. Ø. Mæhle (2001), Quarterly National Accounts Manual: Concepts, Data Sources, and Compilation, Washington, D.C.: International Monetary Fund.

Box, G. E. P. und Pierce, D. A. (1970), Distribution of Residual Correlations in Autoregressive-Integrated Moving Average Time Series Models, Journal of the American Statistical Association, 65, S. 1509-1526.

Cleveland, W. S. und Devlin, S. J. (1980), Calendar Effects in Monthly Time Series: Identification by Spectrum Analysis and Graphical Methods, Journal of the American Statistical Association, 75, S. 487-496.

Cleveland, W. S. und Devlin, S. J. (1982), Calendar Effects in Monthly Time Series: Modeling and Adjustment, Journal of the American Statistical Association, 77, S. 520-528.

Enders, W. (1995), Applied Econometric Time Series, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. Hoboken, NJ: Wiley.

Kirchner, R. (1999), Auswirkungen des neuen Saisonbereinigungsverfahrens Census X-12-ARIMA auf die aktuelle Wirtschaftsanalyse in Deutschland. Volkswirtschaftliche Forschungsgruppe der Deutschen Bundesbank, Diskussionspapier 7/99.

Ladiray, D. und Quenneville, B. (2001), Seasonal Adjustment with the X-11 Method, Lecture Notes in Statistics 158. New York: Springer.

Ljung, G. M. und Box, G. E. P. (1978), On a Measure of a Lack of Fit in Time Series Models, Biometrika, 65 (2), S. 297–303.

Rudolph, H. (2001), Arbeitsmarktanalyse: Saisoneinfluss und Konjunktur * Antworten auf häufig gestellte Fragen zur Saisonbereinigung von Arbeitsmarktdaten, Nürnberg: IAB-Kurzbericht, 12/2001.

Stier, W. (2001), Methoden der Zeitreihenanalyse. Berlin (u.a.): Springer.

Soukup R. J. und Findley, D. F. (1999), On the Spectrum Diagnostics Used by X-12-ARIMA to Indicate the Presence of Trading Day Effects after Modeling or Adjustment, ASA proceedings.

Tiller, R. B. und Evans, T. D. (2004), Revision of Seasonally Adjusted Labor Force Series 2004. Employment and Earnings, January 2004, S. 1-7.

US Census Bureau (2011), X-12-ARIMA Reference Manual, Washington, D.C.

Anhänge:

Anhang A: Identifikation von Extremwerten und Bestimmung der Gewichte der rohen Saisonfaktoren bei der Berechnung von Ersatzwerten

Identifikation von Extremwerten:

Um Extremwerte zu identifizieren, betrachtet man die Abweichung der Irregulären Komponente von ihrem Erwartungswert. Dabei werden diejenigen Beobachtungen als Extremwerte angesehen, die ihren Erwartungswert um mehr als einen vorher definierten Schwellenwert überschreiten. Um den Schwellenwert zu ermitteln, ab dem eine Beobachtung als Extremwert gilt, wird die Standardabweichung der Irregulären Komponente über ein gleitendes Fünfjahresfenster berechnet (das laufende Jahr sowie die beiden Vorjahre und die beiden Folgejahre). Die gleitende Standardabweichung für das Jahr *j* ist folgendermaßen definiert (vgl. Kirchner, 1999, S. 28):

$$\sigma_j = \left\{ \frac{1}{60} \sum_{k=j-2}^{j+2} \sum_{i}^{12} (I_{ik} - 1)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Dabei stellt $I(ij)\ \ i = 1, \ldots, 12\ und\ j = 1, \ldots n$ die Irreguläre Komponente den Kalendermonat *i* im Jahr j dar. Der Länge der zu bereinigenden Zeitreihe beträgt n Jahre. Als Schwellenwert (für die Abweichung der Irregulären Komponente vom Erwartungswert) wird ein Vielfaches der Standardabweichung festgelegt, in der Standardeinstellung das 1,5-fache.

Bestimmung der Gewichte der rohen Saisonfaktoren bei der Berechnung von Ersatzwerten:

In Perioden, in denen die Irregulären Komponente $I(t)$ um mehr als den festgelegten Schwellenwert von ihrem Erwartungswert abweicht, werden die rohen Saisonfaktoren durch korrigierte Werte ersetzt. Die korrigierten Werte werden gebildet, indem man die Irregulären Komponente $I(t)$ mit dem Faktor

$$w(t) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } |I(t) - 1| < a\sigma_j \\ \frac{1}{(b-a)}\left(b - \frac{|I(t)-1|}{\sigma_j}\right) & \text{wenn } a\sigma_j < |I(t) - 1| < b\sigma_j \\ 0 & \text{wenn } |I(t) - 1| > b\sigma_j \end{cases}$$

gewichtet. Die Größe a in dieser Gleichung definiert einen unteren Schwellenwert, für die Abweichung der Irregulären Komponente $I(t)$. Weicht $I(t)$ um *a* Standardabweichungen σ_j oder mehr vom Erwartungswert eins ab, wird $I(t)$ als Extremwert behandelt und erhält ein Gewicht kleiner eins. Die Größe *b* gibt einen oberen Schwellenwert an. Wenn $I(t)$ um mehr als *b* Standardabweichungen vom Erwartungswert abweicht, ist der Gewichtungsfaktor $w(t)$ gleich null. Standardmäßig werden die Größen *a* und *b* auf die Werte 1,5 und 2,5 gesetzt. Abbildung 14 stellt den Gewichtungsfaktor $w(t)$ in Abhängigkeit von der standardisierten betragsmäßigen Abweichung der Irregulären Komponente von Ihrem Erwartungswert $|I(t)-1|/\sigma_j$ dar.

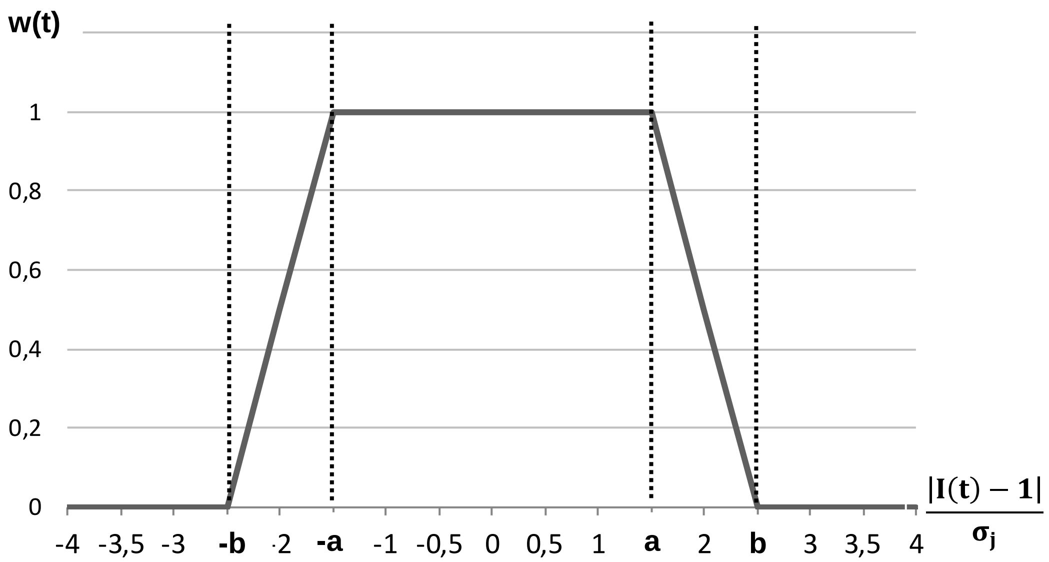

Abbildung 14: Gewichtungsfaktor von Extremwerten der Irregulären Komponente

Ein Zahlenbeispiel: Die für den betrachteten Monat *t* geschätzte Irreguläre Komponente sei $I(t) = 0{,}95$. Als gleitende Standardabweichung für das betrachtete Jahr *j* habe man den Wert $\sigma_j = 0{,}025$ ermittelt. Die Abweichung der Irregulären Komponente vom Erwartungswert beträgt zwei Standardabweichungen: $\frac{|0{,}95-1|}{0{,}025} = 2$. Die Standardabweichung liegt damit zwischen der unteren Grenze $a = 1{,}5$ und der oberen Grenze $b = 2{,}5$. Als Gewichtungsfaktor ergibt sich daher

$$w(t) = \frac{1}{2{,}5-1{,}5}\left(2{,}5 - \frac{|0{,}95-1|}{0{,}025}\right) = 2{,}5 - 2 = 0{,}5.$$

Anhang B: Randwertprobleme bei der Trendschätzung mit gleitenden Durchschnitten

Als Trend- und Saisonfilter werden üblicherweise symmetrische gleitende Durchschnitte verwendet. Am aktuellen Rand einer Zeitreihe kann kein symmetrischer gleitender Durchschnitt als Filter verwendet werden, da nach dem betrachteten Datenpunkt keine Beobachtungen mehr vorliegen. Man könnte in diesen Fällen asymmetrische gleitende Durchschnitte als Filter einsetzen, bei denen nicht die gleiche Zahl an zukünftigen und vergangenen Beobachtungen in die Schätzung der Trend- bzw. Saisonfaktoren einfließen. Asymmetrische Filter am Ende einer Zeitreihe berücksichtigen die vergangene Entwicklung stärker. Die Folge ist eine Verzerrung der resultierenden Schätzungen des Trends und der Saisonfaktoren. Abbildung 15 illustriert diesen Sachverhalt.

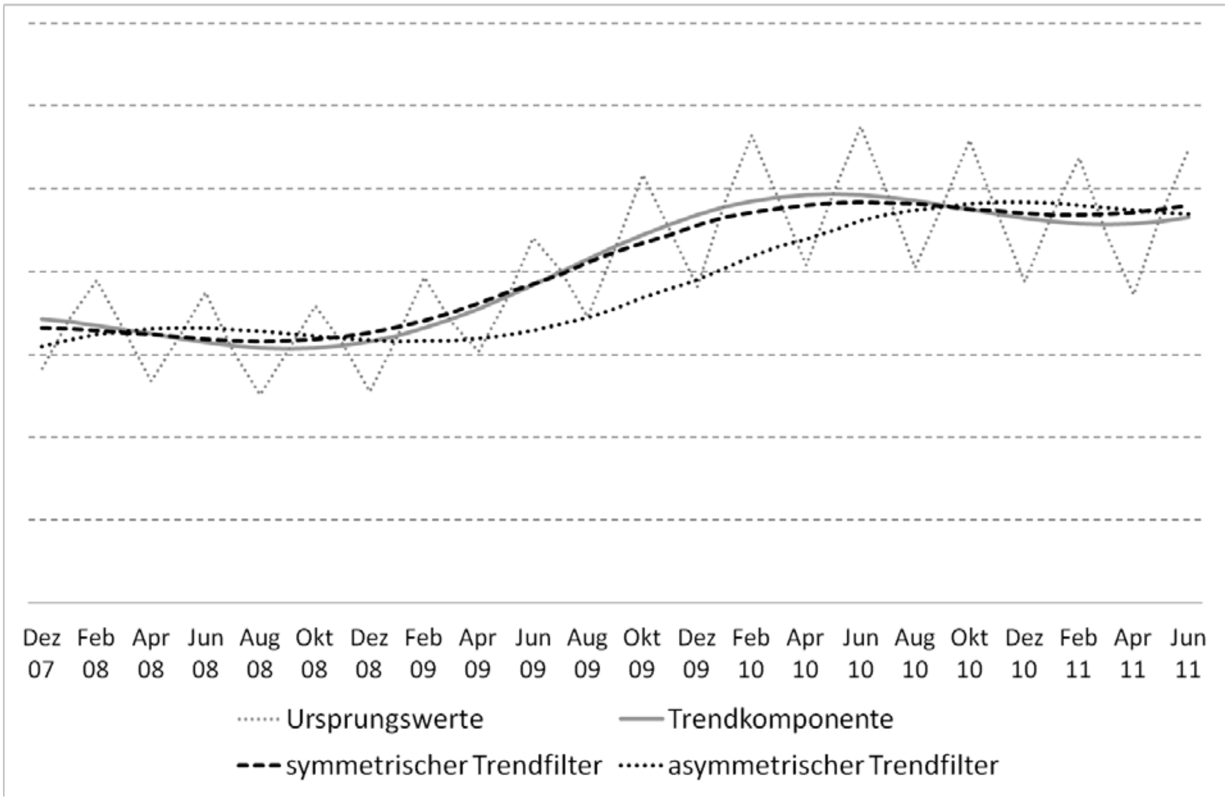

Abbildung 15: Trendschätzungen bei Verwendung unterschiedlicher Trendfilter

Die Abbildung zeigt eine Zeitreihe (graue gepunktete Linie), die mit einem multiplikativen Komponentenmodell erzeugt wurde. Die graue fett gedruckte Linie stellt die wahre Trendkomponente dar. Die Schwarze gestrichelte Linie gibt den Trend wieder, der mit einem symmetrischen (2x12)-gleitenden Durchschnitt geschätzt wurde. Die schwarze gepunktete Linie stellt die Trendschätzung mit einem asymmetrischen Filter dar. Die Schätzung mit dem symmetrischen Filter spiegelt den tatsächlichen Trendverlauf gut wider. Die Schätzung mit dem asymmetrischen Filter ist dagegen rechtsverzerrt, d.h. sie bildet den tatsächlichen Trendverlauf erst mit einer zeitlichen Verzögerung ab. Verwendet man den asymmetrischen Filter zur Trendschätzung, werden Wendepunkte in der Trendentwicklung nur verspätet erkennbar. Der Einsatz asymmetrischer Filter erhöht zudem die Zahl der Revisionen am aktuellen Rand, denn mit jedem zusätzlichen Datenpunkt am Reihenende ändern sich die Saison-und Trendfilter. Dies beeinträchtigt die Stabilität der Ergebnisse am aktuellen Rand. Um die Verzerrung der Trendschätzung und instabile Ergebnisse zu vermeiden, werden die Zeitreihen im RegARIMA-Modul durch Schätzwerte an den Rändern verlängert.

Anhang C: ARIMA-Modelle

Die Originalreihe wird durch Schätzwerte an den Rändern verlängert, um Randwertprobleme zu verringern. Bei der Modellschätzung wählt man ein Modell, das den datengenerierenden Prozess der untersuchten Zeitreihe beschreiben soll, und schätzt die Parameter mittels einer Regression. Zeitreihen müssen bestimmte Eigenschaften besitzen, damit klassische Verfahren der Regressionsanalyse auf sie angewendet werden können. Dazu gehört die Eigenschaft, dass der Erwartungswert, die Varianz und die Autokovarianzen der betrachteten Reihe über die Zeit konstant sind. Werden diese Bedingungen erfüllt, bezeichnet man eine Zeitreihe als stationär. Wirtschaftsstatistische Reihen erfüllen in der Regel aber die Bedingungen für Stationarität nicht. Sie sind häufig trendbehaftet (kein konstanter Erwartungswert) und weisen Schwankungen auf, die vom Niveau der Zeitreihe abhängen (Varianz und Autokovarianzen nicht konstant). Es ist in diesen Fällen erforderlich, die Zeitreihen durch geeignete Transformationen stationär zu machen. Die Niveauabhängigkeit der Schwankungen kann häufig dadurch beseitigt werden, dass man die Zeitreihen logarithmiert. Die Trendentwicklung wird durch ein- oder mehrmalige Differenzenbildung eliminiert. Diese Transformation (Logarithmierung und anschließender Differenzenbildung) nutzt man später erneut um die mit Regresssionsschätzung verlängerte Zeitreihe zurück zu transformieren, also eine geschätzte Verlängerung der Originalreihe zu erhalten..

Stationäre Zeitreihenprozesse können entweder als *AR-Prozess* (Autoregressiver Prozess, erklärt eine Variable durch ihre Vergangenheitswerte), als *MA-Prozess* (Moving-Average-Prozess, erklärt eine Variable durch laufende und verzögerte Zufallseinflüsse) oder als Kombination dieser beiden Prozesse (ARMA-Prozess: Autoregressiver-Moving-Average- Prozess) dargestellt werden. Man bezeichnet stationäre Prozesse daher auch als *ARMA-Prozesse*. Muss ein Zeitreihenprozess erst durch Differenzenbildung stationär gemacht werden, damit er durch einen ARMA-Prozess modelliert werden kann, so bezeichnet man ihn als „integrierten“ Prozess oder *ARIMA-Prozess* (Autoregressive Integrated Moving Average Process). Trendbehaftete Zeitreihen können durch Differenzenbildung stationär gemacht werden. Die Differenzenbildung zur Trendelimination erfolgt dabei bezogen auf den Vormonat. Wenn die betrachtete Zeitreihe neben einem Trend auch saisonale Einflüsse enthält, so reicht eine Differenzenbildung bezogen auf den Vormonat nicht aus, damit die Zeitreihe stationär wird. Die regelmäßigen, saisonal auftretenden Abweichungen vom Trend haben zur Folge, dass der Erwartungswert der Zeitreihe nicht in allen Perioden identisch ist. Die Zeitreihe ist damit nicht stationär, denn dies setzt einen über die Zeit konstanten Erwartungswert voraus. Um die Zeitreihe stationär zu machen, sind erneut Differenzen zu bilden, diesmal allerdings gegenüber Vorjahreswert.

Ist die Zeitreihe durch geeignete Differenzenbildung stationär gemacht, kann sie mit einem saisonalen ARIMA-Prozess geschätzt werden. Zur Darstellung des der Schätzung zugrunde liegenden ARIMA-Modells wird häufig die folgende Schreibweise verwendet (vgl. Stier 2001, S. 59):

$$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$$

Der erste Klammerausdruck beschreibt das Modell, mit dem die Trend-Zyklus-Komponente der Zeitreihe modelliert wird. Dabei gibt d die Zahl der Differenzen an, durch welche die Trend-Zyklus-Komponente stationär wird. Die Größen p und q spezifizieren das ARMA-Modell, das zur Schätzung der (integrierten) Trend-Zyklus-Komponente verwendet wird. Der Parameter p gibt die Ordnung des AR-Prozesses an, und die Größe q die Ordnung des MA-Prozesses.[34] Der zweite Klammerausdruck gibt das Modell zur Schätzung der Saisonkomponente wieder. Die Größe D gibt an, wie oft die Saisonkomponente bezogen auf die saisonale Periode s differenziert werden muss, damit sie stationär ist. Die Größen P und Q spezifizieren das ARMA-Modell, das zur Schätzung der integrierten Saison-Komponente verwendet wird. Dabei repräsentiert P die Ordnung des AR-Prozesses und Q die Ordnung des MA-Prozesses. Um die Spezifikation des verwendeten ARIMA-Modells zu vervollständigen, kann zusätzlich angegeben werden, ob die Zeitreihen logarithmiert wurden.

In der Standardeinstellung wird das ARIMA-Modell $(0{,}1{,}1) \times (0{,}1{,}1)_{12}$ verwendet (das sog. Airline Modell), um Schätzwerte zur Verlängerung einer Zeitreihe an den Rändern zu erhalten. Andere möglicherweise noch besser geeignete Modellspezifikationen können vom Nutzer selbst angegeben oder durch eine Auto-Modellierungsfunktion gefunden werden, die sich bei der Modellselektion der Methodik von Box und Jenkins (1970) bedient. Zur Ausreißer-Bereinigung werden dem ARIMA-Modell zusätzliche Regressoren hinzugefügt. Die sich so

[34] Die Ordnung des AR-Prozesses ist die größte unterstellte Zeitspanne, über die Vergangenheitswerte einer Größe ihren aktuellen Wert beeinflussen. Die Ordnung eines AR-Prozesses

$$x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \cdots + a_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

ist p.

Die Ordnung des MA-Prozesses ist die größte unterstellte Zeitspanne, über die Vergangenheitswerte eines Zufallseinflusses den aktuellen Wert einer Größe beeinflussen. Die Ordnung eines MA-Prozesses

$$x_t = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + b_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}$$

ist q.

ergebende Kombination aus einem Regressions- und einem ARIMA-Modell wird als RegARIMA-Modell bezeichnet. Das RegARIMA-Modell kann allgemein durch folgende Gleichung dargestellt werden (Tiller und Evans, 2004, S.3):

$$Y_t = \beta X_t + Z_t$$

Dabei repräsentiert Y_t die Originalreihe, β die Regressionskoeffizienten, X_t die Regressoren und Z_t ein saisonales ARIMA-Modell. Die möglichen Spezifikationen der Regressoren bei den unterschiedlichen Ausreißertypen (additive outlier, temporary change und level shift) sind im Abschnitt 3.3 beschrieben.

Anhang D: Diagnostische Kennzahlen

Kennzahl	Gewicht in Q	Erläuterung	Mögliches Vorgehen bei erhöhtem Wert der Kennzahl (# >1).
M1 : Anteil der Irregulären an der gesamten Quartalsvariation	13	Wenn die Irreguläre Komponente im Vergleich zur Saisonkomponente stark schwankt, ist es kaum möglich zwischen saisonalen und irregulären Einflüssen auf die Zeitreihe zu unterscheiden. Ein hoher Wert der Kennzahl M1, d.h. ein hoher Anteil der Irregulären an der Gesamtvarianz, deutet auf eine geringe Qualität der Schätzung der Saison	Vorab-Bearbeitung der Zeitreihe im RegARIMA-Modul (Elimination von Ausreißern und Kalendereffekten)
M2: Anteil der Irregulären an der Gesamtvarianz	13	Wie bei M1.	Vorab-Bearbeitung der Zeitreihe im RegARIMA-Modul (Elimination von Ausreißern und Kalendereffekten)
M3: Durchschnittliche Änderung der Irregulären über ein Quartal im Verhältnis zur durchschnittlichen Änderung der Trendzykluskomponente über ein Quartal	10	Variation der Irregulären Komponente im Vergleich zur glatten Komponente.	Variation der Irregulären Komponente im Vergleich zur glatten Komponente ist zu hoch. Vorab-Bearbeitung der Zeitreihe im RegARIMA-Modul (Elimination von Ausreißern und Kalendereffekten) kann Variation der Irregulären Komponente reduzieren.
M4: Autokorrelation der Irregulären gemessen durch die „Average Duration of Run“.	5	Bei hohem Wert der Kennzahl ist die Irreguläre Komponente stark autokorreliert. Sie enthält dann Einflüsse, die nicht der Irregulären Komponente zugerechnet werden sollten.	Vorab-Bearbeitung der Zeitreihe im RegARIMA-Modul (Elimination von Ausreißern und Kalendereffekten)
M5: Months of Cyclical Dominance (MCD)	11	Gibt die kleinste Zahl von Monaten an, bei der die absolute Veränderung der glatten Komponente die absolute Veränderung der Irreguläre Komponente überwiegt.	Variation der Irregulären Komponente im Vergleich zur glatten Komponente ist zu hoch. Vorab-Bearbeitung der Zeitreihe im RegARIMA-Modul (Elimination von Ausreißern und Kalendereffekten) kann Variation der Irregulären Komponente reduzieren.
M6: Die durchschnittliche Vorjahresveränderung der Irregulären im Verhältnis zur durchschnittlichen Vorjahresveränderung der Saisonkomponente.	10	Ein hoher Wert von M6 deutet an, dass die Variabilität der Irregulären Komponente im Vergleich zur Saisonkomponente zu hoch ist. Saisoneinflüsse können dann nicht ausreichend von irregulären Einflüssen unterschieden werden.	Durch Wahl kürzerer Saisonfilter wird die Variabilität der Saisonkomponente erhöht und die der Irregulären verringert.

Tabelle 6: Kennzahlen der M-Tests (vgl. Bloem u.a., 2001, S.136 f.)

Kennzahl	Gewicht in Q	Erläuterung	Mögliches Vorgehen bei erhöhtem Wert der Kennzahl (# >1).
M7: Zeitvariable Saisonalität der rohen Saisonfaktoren im Verhältnis zur zeitstabilen Saisonalität.	16	Wird aus den F-Teststatistiken des „stable seasonality test" (Nullhypothese: Durchschnittliche monatsspezifischen rohen Saisonfaktoren sind für alle Monate des Jahres gleich; bei Ablehnung der Null hoher Wert Teststatistik F_S) und des „moving seasonality test" (Nullhypothese: Die Saisonfaktoren für jeden einzelnen Monat eines Jahres bleiben im Zeitverlauf gleich; bei Nichtablehnung der Null kleiner Wert der Teststatistik F_M). Die Kennzahl M7 ist so konstruiert, dass hohe Werte von F_S und kleine Werte von F_M ihren Wert verringern et vice versa. Hohe Werte von M7 (d.h. kleine Werte von F_S und hohe Werte von F_M) deuten darauf hin, dass keine stabilen Saisoneinflüsse vorhanden sind.	Keine Saisonbereinigung durchführen. Erhöhter Wert der Kennzahl deutet auf die Abwesenheit eines stabilen Saisoneinflusses hin.
M8: Misst die Stärke der Bewegung der Saisonkomponente	7	Ein hoher Wert von M8 deutet auf viele zufallsbedingte Schwankungen der Saisonfaktoren hin. Diese haben Verzerrungen bei der Schätzung der Saisonfaktoren zur Folge.	Durch Wahl längerer Saisonfilter kann die Variabilität der Saisonkomponente verringert werden.
M9: Misst wie M8 die Stärke der Bewegungen der Saisonkomponente, berücksichtigt aber nur auf die lineare Komponente der Änderung.	7	Ein hoher Wert von M8 deutet auf viele zufallsbedingte Schwankungen der Saisonfaktoren hin. Diese haben Verzerrungen bei der Schätzung der Saisonfaktoren zur Folge.	Durch Wahl längerer Saisonfilter kann die Variabilität der Saisonkomponente verringert werden.
M10: Wie M8. Bezieht sich aber nur auf die aktuellsten Jahre des betrachteten Zeitraums.	4	Wie M8.	Wie M8.
M11: Wie M9. Bezieht sich aber nur auf die aktuellsten Jahre des betrachteten Zeitraums	4	Wie M9.	Wie M9.

Tabelle 6: Kennzahlen der M-Tests

Anhang E: Faltung von gleitenden Durchschnitten

Die Gewichte eines 2x12 gleitenden Durchschnitts ergeben durch sequentielle Anwendung eines zwölfgliedrigen gleitenden Durchschnitts $M_{12}[Y(t)]$ und eines zweigliedrigen gleitenden Durchschnitts $M_2[Y(t)]$, d.h. $M_{2x12}[Y(t)]$ =$M_2\big[M_{12}[Y(t)]\big]$. Um die Gewichte des 2x12 gleitenden Durchschnitts zu ermitteln, berechnet man zunächst den zwölfgliedrigen gleitenden Durchschnitt für die Zeitpunkte t und t-1. Man erhält damit die Werte $M_{12}[Y(t)]$ und $M_{12}[Y(t-1)]$. Anschließend berechnet man aus diesen beiden Werten einen zweigliedrigen gleitenden Durchschnitt und erhält einen 2x12 gleitenden Durchschnitt: $M_{2x12}[Y(t)] = \frac{1}{2}M_{12}[Y(t)]$+$\frac{1}{2}M_{12}[Y(t-1)]$. Die unten stehende Tabelle fasst das Vorgehen zusammen:

	θ_{t-6}	θ_{t-5}	θ_{t-4}	θ_{t-3}	θ_{t-2}	θ_{t-1}	θ_t	θ_{t+1}	θ_{t+2}	θ_{t+3}	θ_{t+4}	θ_{t+5}	θ_{t+6}
$M_2[Y(t)]$						$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$						
$M_{12}[Y(t)]$		$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	
$\frac{1}{2}M_{12}[Y(t)]$		$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$
$\frac{1}{2}M_{12}[Y(t-1)]$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	
$\boldsymbol{M_{2x12}[Y(t)]}$ $=\boldsymbol{\frac{1}{2}M_{12}[Y(t)]}$ $+\boldsymbol{\frac{1}{2}M_{12}[Y(t-1)]}$	$\boldsymbol{\frac{1}{24}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{12}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{12}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{12}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{12}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{12}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{12}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{12}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{12}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{12}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{12}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{12}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{24}}$

Tabelle 7: Bestimmung der Gewichte eines 2x12 gleitenden Durchschnittes

Statistik-Infoseite

Im Internet finden Sie weiterführende Informationen der Statistik der Bundesagentur für Arbeit.

Statistische Daten erhalten Sie unter „Statistik nach Themen“.

Es werden folgende Themenbereiche angeboten:

Arbeitsmarkt im Überblick
Arbeitslose und gemeldetes Stellenangebot
Arbeitsmarktpolitische Maßnahmen
Ausbildungsstellenmarkt
Beschäftigung
Grundsicherung für Arbeitsuchende (SGB II)
Leistungen SGB III
Statistik nach Berufen
Statistik nach Wirtschaftszweigen
Zeitreihen
Eingliederungsbilanzen
Amtliche Nachrichten der BA
Kreisdaten

Daten bis 12/2004 finden Sie unter dem Menüpunkt „Archiv bis 2004“

Es werden Glossare zu folgenden Themenbereichen angeboten:

Arbeitsmarkt
Ausbildungsstellenmarkt
Beschäftigung
Förderstatistik/Eingliederungsbilanzen
Grundsicherung für Arbeitsuchende (SGB II)
Leistungen SGB III

Hintergründe zur Statistik nach dem SGB II und III und zur Datenübermittlung nach § 51b SGB II finden Sie unter dem Auswahlpunkt „Grundlagen“.

Methodische Hinweise der Statistik finden Sie unter dem Auswahlpunkt „Methodische Hinweise“.

Für weitere Datenwünsche, Sonderauswertungen und Auskünfte:

Bundesagentur für Arbeit
Statistik Datenzentrum

Hotline:	0911 / 179 - 3632
Fax:	0911 / 179 - 908053
E-Mail:	statistik-datenzentrum@arbeitsagentur.de
Post:	Regensburger Straße 104, 90478 Nürnberg